МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

(ДГТУ)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Конспект лекций
для бакалавров заочной формы обучения
направления подготовки 38.03.01 Экономика

Ростов-на-Дону
2022

Тема 1: «ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ»

1. История развития Исследования Операций
2. Особенности дисциплины исследование операций
3. Основные этапы операционного исследования

1. История развития Исследования операций

Исследование операций (ИО) – это применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности (Вентцель Е.С. Введение в ИО). Исследование операций (ИО) – это применение математических методов для моделирования систем и анализа их характеристик (Таха Х, Введение в ИО).

В 1935 г. в Великобритании с целью подготовки эффективных средств противодействия возрастающей угрозе со стороны военно-воздушных сил Германии ученые начали форсированную подготовку серии экспериментов, направленных на разработку системы обнаружения самолетов. Принцип действия этой системы состоял в излучении радиоволн наземным радиопередатчиком с последующим приемом излучения, отражаемого от самолета; такая схема впоследствии получила название радиолокационной. Эти работы были начаты в Орфорднисе, расположенном на восточном побережье Великобритании севернее устья Темзы почти на 100 км, а затем продолжены в Бодси (на 16 км южнее), где впоследствии была сформирована исследовательская группа и установлено разработанное оборудование.

В течение последующих трех лет была подтверждена техническая работоспособность установленных средств обнаружения и созданы практические методы слежения за самолетом и оповещения о его появлении. Однако для повышения эффективности операций перехвата британская истребительная авиация нуждалась в системе сопровождения и наведения самолетов-перехватчиков. Поэтому независимо от работ по созданию системы обнаружения (что было продиктовано интересами секретности) в начале 1936 - конце 1937 гг. были начаты работы по осуществлению "эксперимента Биггин Хилл", идею которого предложил Генри Тайзард. Истребители, взлетающие с аэродрома в Биггин Хилле, расположенном несколько южнее Лондона, использовались в качестве моделей вражеских самолетов, движение которых прослеживалось по сигналам их радиотехнических устройств. Слежение за другой группой истребителей, представляющих самолеты-перехватчики, также осуществлялось с помощью радиотехнических устройств. Эти самолеты направлялись в зону боевых действий. Б.Диккенс провел анализ полученных результатов.

К концу 1937 г. обе системы - система обнаружения и слежения за одиночным атакующим самолетом противника (Бодси) и система сопровождения и наведения взаимодействующих истребителей военно-воздушных сил обороны (Биггин Хилл) - стали разрабатываться совместно. Необходимость обеспечения согласованных действий всех участников таких боевых операций, т.е. людей и технических средств подразделений, действующих в воздухе и на земле, потребовала, чтобы эти работы проводились в условиях теснейшего сотрудничества ученых с офицерами и служащими ВВС. "Таким образом, в период между летом 1936 г. и летом 1937 г. была создана техническая и организационная основа системы оперативного управления, без которой боевые действия Великобритании не смогли бы завершиться победой и вряд ли обеспечить защиту страны". Дальнейшее развитие исследований осуществлялось в направлении перехода от технических экспериментов к разработке эффективной тактики ведения военных действий, причем и эти работы также проводились при тесном сотрудничестве ученых с инженерно-техническим персоналом.

По мере того как новые тактические операции отрабатывались в рамках крупномасштабных учебных действий в воздухе, ученые стали уделять все большее внимание оценке эффективности разрабатываемых операций. Применительно как раз к таким исследованиям А.Раув, который в 1938 г. руководил научной группой в Бодси, использовал термин "операционное исследование"; по-видимому, этот термин обязан своим происхождением именно ему.

Таким образом, справедливо считать Бодси местом зарождения нового научного направления - исследования операций, называемого в Англии операционным исследованием, а период с 1935 по 1938 г. - временем формирования основных положений этого научного направления.

К 1939 г. И.Уильямс, руководитель работ в Бодси, перешел в распоряжение штаба истребительной авиации британских военно-воздушных сил, с тем чтобы присоединиться к вновь созданной под руководством Гарольда Ларднера группе, продолжившей работы по оценке эффективности и совершенствованию тактических операций. В течение последующих двух лет ценность этих научных исследований, проводимых с участием офицерского состава армии, была подтверждена столь убедительно, что аналогичные научные подразделения были организованы при штабе бомбардировочной авиации (под руководством Б.Диккенса), штабе береговой авиации (выполняющей функции ведения воздушных боевых действий против подводных лодок) и штабе британских сил противовоздушной обороны.

Массированный ночной налет на Великобританию осенью 1940 г. поставил командование сил противовоздушной обороны перед лицом сложных технических и операционных проблем. Чтобы обеспечить их решение, к научной группе при командовании этими силами присоединился П.Блеккет, физик, получивший впоследствии за свои работы по исследованию космических лучей Нобелевскую премию. Вскоре вокруг него сформировалась активно и продуктивно работающая группа исследователей, ставшая известной как "кружок Блеккета". В марте 1941 г. Блеккет перешел в распоряжение командования береговой авиации, где организовал новый отдел исследования операций, который внес заметный вклад в повышение эффективности работы этого командования. В декабре 1941 г. с Блеккетом консультировались о возможности организации отдела исследования операций при адмиралтействе, и Блеккет составил краткую памятную записку, озаглавленную "Ученые в сфере операционных исследований" (Scietists at the Operational level), которая оказала значительное влияние на организацию аналогичных работ по обе стороны Атлантики. В январе 1942 г. Блеккет перешел в распоряжение адмиралтейства для организации там работ по исследованию операций.

Впоследствии отдел исследования операций командования береговой авиации стал ядром группы исследования операций британской армии, и при каждом из основных военных командных органов Великобритании (как в самой стране, так и на других территориях) были сформированы соответствующие отделы.

Когда в войну вступили Соединенные Штаты, командные органы их военно-морских и военно-воздушных сил стали осознавать целесообразность привлечения ученых к разработке военных операций. В 1942 г. капитан В.Бейкер, офицер противолодочных сил атлантического флота, предложил организовать группу по исследованию операций при командовании противолодочными силами. Формулируя содержание работ и принципы комплектации группы, он использовал ряд положений памятной записки Блеккета от 1941 г. В эту группу, впоследствии переименованную в группу по исследованию операций и подчиненную штаб-квартире главнокомандующего военно-морскими силами США, в качестве руководителя проекта был приглашен Ф.Морз (физик по профессии) из Массачусетского технологического института, а на должность начальника исследовательской группы назначен Уильям Шокли из фирмы Bell Telephone Labaratories, впоследствии ставшей лауреатом Нобелевской премии за работы по транзисторам. В это же время командование военно-воздушных сил США командировало в Аглию для изучения опыта организации исследований операций В.Бэртона Лича, юриста, находившегося в то время на действительной военной службе. После того как он представил доклад, содержащий выводы о целесообразности организации аналогичных работ в США, ему было предложено сформировать отдел исследования операций в восьмой армии ВВС (бомбардировочной авиации), впоследствии передислоцированной в Великобританию. Первые работники этого отдела прибыли на место службы в октябре 1942 г. К концу войны группа по исследованию операций при командовании военно-морскими силами США уже насчитывала в своем составе свыше 70 научных работников, а командование военно-воздушных сил США под руководством Лича организовало свыше двух десятков отделов исследования операций как в тыловых частях, так и в армии, ведущих боевые действия за границей.

Командование военно-воздушными силами Канады также проявило интерес к вопросам организации и проведения операционных исследований и начиная с 1942 г. сформировало три соответствующих отдела.

Совершенно независимо Эллис А.Джонсон, специализировавшийся в области исследований магнетизма, разработал аналогичные концепции исследования операций и применил их к приемам ведения минной войны; его идеи, использованные при разработке соответствующих наступательных тактических операций, сыграли важную роль в боевых действиях на Тихом океане.

Командования вооруженных сил государств оси Рим - Берлин - Токио методы исследования операций не использовали.

Имеющиеся исторические документы и архивы не позволяют точно установить количество тех ученых, которые были заняты исследованием опе- раций во время второй мировой войны, однако даже осторожные оценки свидетельствуют о том, что общее число таких ученых в Англии, Америке и Канаде превышало 700 человек. Их деятельность, слишком разнообразная для того, чтобы можно было охарактеризовать ее полностью, не только охватывала элементы технических решений, оценки результатов тактических операций и новшеств (о чем уже говорилось), но и включала применение соответствующих знаний при планировании тактических операций и выработке стратегии. Наиболее важным для будущего было то, что многие из специалистов увидели в таких научных разработках военного времени зарождение новой науки о функциональных системах, а также возможности использования соответствующих научных знаний для многих видов деятельности в мирное время.

Обзоры исследований военного времени содержатся в частности в книге Морза и Кимбелла, на которой в основном и бази- руется приведенная выше краткая справка по истории развития исследования операций.

После второй мировой войны специалисты осознали, что работам по исследованию операций в том его понимании, которое сложилось во время войны, предшествовали многие исследования аналогичной направленности, например работа Ланчестера по моделированию боевых операций, выполненная в 1916 г., работы по теории массового обслуживания Эрланга, нашедшие практическую реализацию в начале двадцатого столетия в Копенгагене, исследования Левинсона в области розничной торговли в начале 20-х годов. Однако эти исследования оставались разрозненными до тех пор, пока не были подхвачены общим потоком разработок, начало которого только что было кратко охарактеризовано. Таким образом, есть достаточные основания считать, что появление методов исследования операций связано с выделением самостоятельной области научной деятельности, имеющей продолжительную историю, начало которой положили работы, проведенные во время второй мировой войны.

Очевидно, что многие из первых исследователей в области исследования операций считали свою работу научной деятельностью; так, в памятной записке Блеккета от 1941 г. подчеркивалось, что работа должна состоять в "научном исследовании операций", и особое внимание обращалось на то, что условия должны соответствовать именно научному характеру работы: "Необходима такая обстановка, которая существует в первоклассном чисто научно-исследовательском институте, и квалификация кадров должна удовлетворять соответствующим требованиям".

Во второй памятной записке ("О некоторых аспектах методологии исследования операций"), составленной в 1941 г., но затем переработанной в мае 1943 г., Блеккет развивает эти положения и отмечает: "Очевидной особенностью исследования операций в том виде, в котором оно проводится в настоящее время, является то, что оно должно иметь строго практический характер. Его цель - содействовать нахождению способов повышения эффективности боевых операций, выполняемых в данный момент или планируемых на будущее. Чтобы добиться этого, изучаются предшествующие операции; затем разрабатываются теории, объясняющие наблюдаемые факты, и в конце концов и факты, и теории используются для прогноза относительно предстоящих операций...

Прогнозирование будущих событий, конечно, всегда сопряжено со значительной неопределенностью, но опыт показал, что вопреки широко распространенному мнению количественные прогнозы можно сделать достаточно. Это в значительной степени обусловлено тем обстоятельством, что многие факторы, характеризующие операцию, в течение достаточно продолжительного периода времени остаются почти неизменными. Такая стабильность кажется довольно неожиданной, если иметь в виду множество случайных событий и тех индивидуальных особенностей и способностей людей, которые обычно проявляются даже в ходе небольших операций. Однако все эти различия для большого числа операций сглаживаются, и часто оказывается, что обобщенные результаты сравнительно устойчивы."

В результате своих исследований Морз и Кимбелл также пришли к выводу, что "поведение крупных подразделений (живой силы и техники), осуществляющих сложные операции, характеризуется удивительной устойчивостью, позволяющей предсказывать исход таких операций с той степенью точности, которую не могли предвидеть ученые, работающие в области естественных наук".

Таким образом, первые специалисты по исследованию операций имели ясное представление о том, что новизна их деятельности обусловлена двумя факторами: свойствами функциональных систем, рассматриваемых в качестве объектов научных исследований, и административными структурами, формируемыми с целью своевременной практической реализации решений, принимаемых на основе результатов этих исследований.

Такое понимание сущности исследования операций остается верным и в наши дни.

Цель науки - понять и дать объяснение тому, что происходит в природе, т.е. исследовать явления реальной действительности. Наше понимание природы распространения как на естественные явления, так и на те элементы, которые созданы человеческой деятельностью (явлением считается все, что происходит в этих элементах или осуществляется нами).

Наука начинается с тщательно организованного наблюдения изучаемых явлений. Полученные в результате наблюдения данные приводят ученого к разработке теорий, увязывающих эти факты, а также дающих умозрительное описание и объяснение их. Затем эти теории могут развиваться без обращения к наблюдениям; более существенно то, что они способны дать предсказание того, что произойдет под влиянием различных условий. После этого теоретические выводы проверяются путем новых наблюдений соответствующих явлений; если выводы теории согласуются с данными, полученными в результате этих наблюдений, уверенность в правильности теории возрастает, в противном случае ее следует признать несостоятельной или усовершенствовать. Кемени дает следующую обобщенную характеристику такого процесса:

"Как неоднократно подчеркивал Эйнштейн, наука должна начинаться с фактов и кончаться фактами (независимо от теоретических построений, созданных между ними). Ученый - это прежде всего наблюдатель. Затем он пытается всесторонне описать то, что увидел, и то, что ожидает увидеть в будущем. Базируясь на теории, он делает предсказания, справедливость которых снова проверяет только фактами.

Наиболее характерная черта такого метода - его цикличность. Он начинается с фактов, кончается фактами, и факты, завершающие один цикл, являются началом следующего цикла. Ученый считает свою теорию неокончательной и готов отказаться от нее всякий раз, когда факты не подтверждают ее предсказаний. Если ряд наблюдений, предназначенных для проверки справедливости некоторых предсказаний, вынуждает нас отказаться от теории, мы ищем новую или более совершенную теорию. Так как научное познание представляет собой бесконечную цепь развития, можно ожидать бесконечного продолжения и этого циклического процесса".

Только что описанный процесс составляет суть научного метода, а наука - это совокупность знаний, полученных в результате применения этого метода к явлениям окружающей нас действительности.

Таким образом, именно научный метод объединяет все науки; то, что отличает одну науку от другой, - это сфера явлений окружающего мира, выбранная каждой из них для изучения и объяснения. Так, астроном следит за движением планет, звезд и других тел во Вселенной; геолог изучает явления в земной коре и т.д.

Однако в данном вопросе следует проявлять осторожность и не воспринимать такую схему научного метода как бихевиористическое описание деятельности ученого. Хотя отдельные научные работы действительно следуют изложенному принципу, в большинстве случаев он не выдерживается; например, бывает так, что теории появляются до того, как обнаружены соответствующие им явления (недостаток, довольно типичный для исследования операций на современном этапе), а теории, основанные на изучении отдельных явлений, долго остаются непроверенными новыми фактами и т.д. Таким образом, ученый может начать работу с любого этапа описанного процесса и двигаться в любом направлении для получения крупиц знаний. Однако окончательный синтез подтвержденных знаний достигается в соответствии с описанной схемой научного метода.

2.2. Исследование операций как наука

Следуя изложенным соображениям о философских аспектах науки, можно сказать, что в исследовании операций используется научный метод для изучения и объяснения явлений, связанных с функциональными системами, так как в рамках данной дисциплины изучается определенный круг явлений реальной действительности. Такие системы нередко включают людей и механизмы, которые действуют в условиях реального мира, причем слову "механизм" мы придаем достаточно общее значение, охватывающее все случаи - от механических устройств, обычно определяемых их названиями, до сложных социальных структур, функционирующих в соответствии с установленными правилами.

Научная дисциплина, называемая исследованием операций, наблюдает реальные явления, связанные с функциональными системами, разрабатывает теории (которые многие исследователи называют моделями), предназначенные для объяснения данных явлений, использует эти теории для описания того, что произойдет при изменении условий, и проверяет предсказания новыми наблюдениями.

Таким образом, исследование операций- наука, так как эта дисциплина использует метод для получения соответствующих знаний и отличается от других наук предметом исследований. Она изучает явления связанные с функциональными системами, в том аспекте, который почти не рассматривается другими науками.

Учитывая этапы реализации научного метода, для любой научной дисциплины можно ожидать систематических публикаций четырех категорий, в которых соответственно приводятся результаты, получаемые при наблюдении явлений, и специальные способы проведения таких наблюдений; даются построения математических моделей; описывается применение этих моделей для составления прогноза на основе полученных результатов; проводится проверка прогнозов сравнения с результатами новых наблюдений.

Совокупность математических моделей исследования операций можно разбить на три группы.

К первой группе относятся детерминированные модели, которые были разработаны после второй мирвой войны: линейное программирование, целочисленное программирование, теория графов, потоки в сетях, геометрическое программирование, нелинейное программирование, программирование для случая задач большой размерности, теория оптимального управления.

Ко второй группе относятся стохастические модели: случайные процессы, теория массового обслуживания, теория полезности, анализ управляющих решений, теория игр, теория поиска, имитационное моделирование и динамическое программирование.

Третью группы составляют наиболее важные модели, разработанные применительно к тринадцати группам процессов, являющихся достаточно общими для многих областей применения методов исследования операций:

1. прогнозирования;
2. учета финансовой деятельности и управления экономикой;
3. сбыта и рекламы;
4. управления трудовыми ресурсами;
5. экономического анализа инвестиций;
6. информационных систем для управления;
7. вычислительных и информационных систем;
8. выбора, планирования и управления разработкой проекта;
9. управления запасами;
10. составления календарных планов производства и последовательности работ;
11. замены, ремонта и анализа надежности оборудования;
12. размещения и загрузки производственных мощностей;
12. планирования производства.

Наиболее хорошо методы исследования операций по состоянию на 1975 год для следующих областей:

- военные проблемы,
- работа государственных органов,
- городские системы,
- здравоохранение,
- системы образования,
- транспорт,
- коммунальное обслуживание,
- отрасли промышленного производства
- технологические процессы.

На протяжении всей истории развития методов исследования операций научные работники следовали рекомендациям Блеккета (из его памятной записки), согласно которым исследование операций, как и любая другая наука, не базируется на использовании точных копий аналитических методов какой-либо другой науки, а требует разработки своего собственного математического аппарата - методов исследования операций - ориентированного на специфику, присущую этой области и задачам исследования. Этот аппарат не должен оставаться неизменным; наоборот, он должен меняться в соответствии с характером исследуемых задач.

Во время второй мировой войны большинство работ по исследованию операций основывалось на адаптации методов и подходов, заимствованных из других наук; в частности, построение большинства математических моделей базировалось на непосредственном использовании средств математического анализа, аппарата теории вероятностей и статистики, и довольно часто отправным моментом построения моделей служило сходство с моделями, используемыми другими науками. Заметным исключением из этого правила стала разработка теории поиска, выполненная группой по исследованию операций при ВМС США. Таким образом, новые теоретические направления были развиты в основном в послевоенное время. Основы теории ведения боевых действий заложены Ланчестером в 1916 г.; и хотя во время войны математические аспекты этой теории исследовались достаточно интенсивно, непосредственного применения при разработке операций военного времени она не нашла. Действительно, вплоть до 1954 г. эта теория не была достаточно проверена.

Однако после второй мировой войны исследования новых явлений реального мира и теории для их объяснения развивались очень интенсивно.

Зарождение исследования операций как научной дисциплины было обусловлено неотложным требованием решения важных практических проблем. Поэтому в процессе становления и развития исследования операций научные работники, которые занимались соответствующими исследованиями, не только заложили фундамент некоторого нового научного направления, но и использовали полученные знания для практического решения проблем. В течение второго и третьего десятилетий своего существования группы по исследованию операций значительно выросли и стали достаточно отличаться друг от друга по направлениям. Однако тесная связь между исследовательскими и практическими аспектами разработок оставалась характерной особенностью данной дисциплины: термин "исследование операций" как раз и подчеркивает их неразрывность. Итак, исследование операци включает как научное исследование систем, так и соответствующие виды технической деятельности, направленной на практическую реализацию результатов таких исследований.

Однако эти прикладные аспекты исследования операций предполагают не только простое применение знаний, полученных в результате использования теории, но требуют и наличия творческого начала (ориентации работы в желаемых направлениях), а также профессионального умения и навыков практического проектирования (направленных на выполнение требуемых задач или решение важных проблем). Кроме того, важно обеспечить внедрение результатов работ.

Ввиду секретности подробности исследований военного времени долгое время не находили отражения в открытой печати; однако теперь многое из того, что было сделано в тот период, уже опубликовано. И в настоящее время ряд практических аспектов исследования операций не рассматривается в открытых публикациях из-за ограничений, накладываемых промышленными фирмами и законодательными органами. Однако имеющаяся литература, хотя и представлена в силу указанных ограничений преимущественно работами теоретического характера, все же содержит описание многих примеров использования методов исследования операций. Даже при случайном поиске публикаций соответствующего характера можно встретить интересные и впечатляющие примеры применения метода исследования операций.

Однако литературы, освещающей опыт творческого подхода и конкретного проектирования на базе методов исследования операций, сравнитель но мало. Наибольший опыт в этом отношении накоплен в военной области, но в настоящее время заметен существенный прогресс и в невоенных приложениях.

Вопросы профессионального отношения к практической стороне исследования операций и реализации его результатов обсуждались уже в первых работах; в них подчеркивалась важность этих вопросов и содержались соответствующие рекомендации. Например, Блеккет, а также Морз и Кембелл, основываясь на практическом опыте своей работы во время войны, рассматривали вопрос о том, каким образом специалисту следует получить одобрение своей работы, в каких условиях должна выполняться работа, и какие отношения он должен поддерживать с теми, кто пользуется его рекомендациями. В связи с этим следует отметить четыре момента:

Вопросы, связанные с проведением исследования операций.

Комиссия Американского общества по исследованию операций (Operations Research Society of America - ORSA) сформулировала некоторые руководящие принципы по порядку проведения исследования операций. Это предложение было встречено на первых порах весьма критичес- ки, и хотя сформулированные принципы опираются на практический опыт военного времени и двух последующих десятилетий, по-видимому, еще рано говорить о том, будут ли они приняты в качестве постоянного руководства в практической деятельности при изменении обстановки в будущем.

Взаимоотношения групп исследования операций с организациями-заказчиками.

Исследование операций реализуется в условиях, формируемых коллективами людей, и фактически конечная его цель - понять их поведение с тем, чтобы направить их действия в желательном направлении. В действительности же деятельность, связанная с исследованием операций, становиться лишь одним из элементов поведения сложной системы, которую мы называем большим коллективом людей. Понимание этого естественно приводит к важным выводам практического характера.

В пределах одной главы невозможно исчерпывающе описать историю развития методов исследований операций в течение последних трех десятилетий. Поэтому в данной главе дается лишь очень краткое изложение некоторых более формальных вопросов. К ним относятся некоторые характерные тенденции развития методов исследования операций в рассматриваемом периоде, возникновение и развитие профессиональных ассоциаций, рост количества издаваемых журналов и книг по исследованию операций и развитие системы профессионального образования.

Хотя большинство специалистов, занимавшихся во время войны исследованиями операций, вернулись после ее окончания к своей довоенной деятельности, со сферой военных приложений осталось связанным сильное ядро специалистов, желавших продолжить сотрудничество, которое оказалось весьма продуктивным в годы войны. В последующее десятилетие значительное развитие методов исследования операций имело место не только на этой основе, но и за счет создания новых подразделений. Так, в США группа по исследованию операций ВМС превратилась в расширенную группу оценки операций (под руководством Джакинто Стейнхарда), работающую по контракту с Массачусетским технологическим институтом. ВВС США также расширили свои отделы исследования операций (под началом Ле-Рой А.Бразерса), а в 1948 г. командование сухопутными войсками США по контракту с университетом Джона Гопкинса сформировало управление по исследованию операций. В 1949 г. объединенный комитет начальников штабов создал группу оценки систем вооружения, первым техническим директором которой был назначен Филип М.Морз. В то же время в ВВС учредили Проект РЭНД при авиационной корпорации "Дуглас", а в 1949 г. это подразделение стало уже корпорацией РЭНД. К началу 50-х годов эти организации были укомплектованы штатом сотрудников, численность которого превышала численность лиц, занимавшихся в военное время исследованием операций во всех странах-союзниках, вместе взятых, причем эти организации обеспечивали очень широкий диапазон исследований для организаций-заказчиков. Подобным же образом, хотя и не столь интенсивно, происходило расширение фронта исследований операций в Канаде и Великобритании.

После окончания войны эти организации обратили свое внимание на широкий круг проблем, связанных с планированием, и получили много полезных результатов в таких направлениях, как моделирование с помощью ЭВМ, анализ по критерию "затраты-выгода" и системный анализ; были достигнуты значительные успехи в теории поиска, теории игр, программировании, теории полезности и в других областях. Располагая многочисленным персоналом, эти организации смогли, значительно расширив круг проводимых исследований, приступить к крупномасштабному исследованию военных стратегий. Одновременно фирмы, выполняющие заказы военных ведомств, существенно расширили работы по исследованию операций применительно к заявкам на проектные разработки и исследования в области планирования, а ряд фирм, занимавшихся исключительно исследовательскими работами, приступили к проведению большого объема таких работ военного характера.

Благодаря этому произошли коренные изменения в планировании и принятии важнейших решений в области военной стратегии. Однако это было обусловлено не только проведенными исследованиями, но и влиянием многих лиц из исследовательских организаций, занявших ключевые посты в военных ведомствах. Так, например, пост начальника контрольно-финансового управления министерства обороны США с 1961 по 1965 г. занимал Чарльз Дж.Хитч, крупный экономист корпорации РЭНД, бывший ранее президентом Американского общества по исследованию операций, а в 1973 г. другой руководящий работник корпорации РЭНД - Джеймс Р.Шлезингер - был назначен министром обороны США.

Хотя исследования операций и оказало сильное влияние на планирование военной стратегии и систем вооружения, вызывает большое удивление тот факт, что полученные выводы не смогли существенно повлиять на военную политику США в связи с войной во Вьетнаме.

Одновременно наблюдался рост исследований операций в основных отраслях промышленности и в научной деятельности университетов. К 1955 г. центр тяжести интересов исследовательских групп стал явно смещаться в сторону работ в невоенных сферах. Одним из показателей этого был быстрый рост после 1954 г. группы исследователей, концентрирующих внимание на научных методах управления, т.е. специализированном направлении, которое отличается от исследования операций только рядом несущественных признаков.

Уже в 1955 г. Филип М.Морз смог дать обзор состояния исследования операций и сделал предложение уделять больше внимания фундаментальным теоретическим положениям, экспериментам и подготовке новых специалистов в данной области. Необходимо сказать об энергичных мерах, принятых в связи с необходимостью подготовки специалистов по исследованию операций. Однако специальные работы, посвященные реализации результатов исследования операций, пока еще слишком разрознены и не столь значительны.

В последнее десятилетие наблюдалось непрерывное расширение сферы применения системного подхода в новых направлениях, особенно заметное в таких областях гражданского управления, как охрана общественного порядка, транспорт, проблемы управления ростом и развитием городов, жилищное строительство, здравоохранение, образование и социальные услуги. Так, например, в 1968 г. был основан институт городского хозяйства, а в 1969 г. - институт развития города Нью-Йорка. Оба этих института разработали весьма разнообразные и эффективные программы, в которых предусматривалось использование методов исследования операций. Фирмы, накопившие опыт по применению методов исследования операций в военной области, существенным образом способствовали расширению использования этих методов при решении задач гражданского управления. В настоящее время в органах гражданского управления на федеральном уровне работают несколько сотен специалистов по исследованию операций, однако они рассредоточены по небольшим группам или даже работают в одиночку. Таким образом, справедливо оценить состояние развития исследования операций в области гражданского управления в США на 1975 г. как далеко не отвечающее существующим потребностям, однако это направление имеет перспективы заметного развития в будущем.

Исследования операций в других странах характеризуются сходными чертами и процессами, но в то же время имеют свои особенности, которые слишком многочисленны.

Общая оценка развития исследования операций по состоянию на 1975 г. свидетельствует о наличии нескольких характерных тенденций, одни из которых являются согласующимися, а другие - в некоторой степени взаимно противоречивыми. С одной стороны, в последние тридцать лет был достигнут значительный прогресс в области теоретических исследований и приложений, порождающий чувство удовлетворения и ощущение высокого профессионализма. С другой стороны, существует влиятельное меньшинство специалистов, которые не разделяют наступательной философии Черчмена, настаивающего на расширении аспектов и областей применения системного подхода. Некоторые лица видят только недостатки и неудачи в данной сфере деятельности, но есть и такие, кто способен видеть вклад, который действительно сделан и который может быть сделан. О том, что данная дисциплина сохраняет свою жизнеспособность, свидетельствует то, что существует интенсивный взаимный обмен информацией между всеми заинтересованными сторонами. С помощью методов исследования операций рассматриваются самые различные задачи, что расширяет теоретическую основу этих методов и перспективу их развития.

4.2. Профессиональные общества

В апреле 1948 г. несколько ученых, принимавших во время второй мировой войны деятельное участие в исследованиях операций в Англии и периодически собиравшихся на неофициальные встречи для обсуждения своих работ, пришли к соглашению о том, чтобы выступить в качестве учредителей Клуба исследования операций; его первым почетным секретарем стал Дж.А.Джукс. Цель создания клуба состояла в том, чтобы придать неофициальным творческим встречам ученых регулярный характер. В течение последующих шести лет в период между сентябрем и маем в помещении Королевского общества (содействия успехам естествознания) в Лондоне ежегодно проводились такие встречи, на которых члены Клуба обсуждали вопросы использования методов исследования операций в сфере услуг и во многих областях хозяйства, включая сельское хозяйство, хлопчатобумажную, обувную, угольную, металлургическую отрасли промышленности, электроэнергетику, животноводство, строительство и транспорт.

Клубом был основан журнал Operational Research Quarterly, первый номер которого вышел в свет в марте 1950 г.; его редакторами были Макс Дэвис и Р.Эддисон.

Учитывая растущий интерес к данной научной дисциплине, 10 ноября 1953 г. члены клуба приняли решение об организации Общества по исследованию операций (Operational Research Society - ORS), членами которого могли стать все лица, занимающиеся этими вопросами. Первым председателем общества был избран О.Г.Венсбурх-Джоунс.

Между тем Национальным исследовательским советом США в 1949 г. был учрежден Комитет по исследованию операций; его председателем стал Горас К.Левинсон - астроном по образованию, который независимо от других исследователей в 20-х годах начал заниматься вопросами исследования операций в области торговли. Цель создания комитета состояла в повышении интереса к исследованию операций в невоенной сфере; для этого комитет опубликовал получивший широкое распространение технический проспект по исследованию операций со специальными рекомендациями для невоенных приложений. В январе 1952 г. его десять специалистов по исследованию операций встретились в Кемридже, шт. Массачусетс, для обсуж- дения мер по созданию в США профессиональной ассоциации. После второй, более продолжительной встречи в марте, посвященной дальнейшей детализации планов, 26-27 мая в Нью-Йорке было проведено собрание, на котором было создано Американское общество по исследованию операций (ORSA). Филип М.Морз, являющийся вдохновителем всех этих действий, был избран первым его президентом. Первое заседание нового общества состоялось в ноябре 1952 г., когда вышел из печати первый номер журнала этого общества - Journal of the Operations Research Society of America (редактором его был Торнтон Пейдж); в 1956 г. название журнала было изменено на Operations Research.

Другая группа научных работников США основала в 1953 г. институт научных методов управления (The Institute of Management Sciences - TIMS), международную организацию, большинство членов которой работает в США. Первым президентом этой организации был избран Уильям У.Купер. Первый номер журнала этого института - Management Science - вышел в свет в сентябре 1954 г.; его редактором был К.Уэст Черчмен.

В январе 1955 г. Рассел Л.Акоф, выдвинутый в то время кандидатом на должность вице-президента ORSA, предложил Б.Г.П.Райветту, секретарю ORS, организовать международную конференцию по исследованию операций. Это предложение сразу же нашло поддержку, и был сформирован организационный комитет, в состав которого вошли в качестве сопредседателей Чарльз Гудви (от ORS) и Торнтон Пейдж (от ORSA и TIMS). 2-5 сентября 1957 г. в Оксфордском университете состоялась первая международная конференция по исследованию операций, в которой приняли участие 250 делегатов из 21 страны. Последующие международные конференции проводились в Эйкс-ин-Провинсе (1960), Осло (1963), Кембридже, шт.Массачусетс (1966), Венеции (1969), Дублине (1972), Токио и Киото (1975). Труды этих конференций являлись своеобразными документами, показывающими текущее состояние и достигнутые успехи в области исследо- вания операций во всем мире.

На первой международной конференции в Оксфорде был составлен предварительный план деятельности Международной федерации общества по исследованию операций (International Federation of Operational Research Societies - IFORS), официально учрежденной 1 января 1959 г. и имевшей сначала в своем составе три организации: ORS, ORSA и Французское общество по исследованию операций (основанное в 1956 г.). Первым секретарем IFORS был Чарльз Гудви.

В период с 1959 по 1975 г. к IFORS присоединились 24 национальных общества других стран; профессиональная ассоциация ЧССР установила тесные контакты с IFORS по каналам соответствующего административного органа. Институт научных методов управления и Общество по математическому программированию, будучи международными организациями, на основе специального соглашения также установили сотрудничество с IFORS. Связи с IFORS поддерживает и одна из узкоспециализированных групп. Однако список организаций, не отражает в полной мере масштабов исследования операций. Например, членами Американского общества по исследованию операций, которое является национальной организацией, в 1974 г. состояли специалисты не менее 67 стран. Таким образом, есть все основания считать, что методы исследования операций получили всемирное распространение.

Установить точное число специалистов всех стран, профессионально занимающихся исследованием операций, не представляется возможным, однако по данным о количестве членов организаций, входящих в IFORS и сотрудничающих с этой федерацией, это число по состоянию на 1975 г., можно грубо оценить в пределах 25-35 тыс. человек.

4.3. Книги

Вскоре после окончания второй мировой войны были написаны три книги, в которых на профессиональном уровне рассмотрены вопросы, касающиеся развития идей и методов исследования операций в военное время, однако сравнительно быстро вышла в свет только одна из них - "Методы исследования операций" Ф.Морза и Д.Кимбелла. Первое правительственное издание этой книги в 1946 г. было секретным, в 1948 г. гриф секретности с нее был снят, и в 1951 г. она вышла в открытом издании. Однако получение правительственного разрешения на открытую публикацию двух других книг затянулось более чем на четверть века. Поэтому в течение ряда лет книга Ф.Морза и Д.Кимбелла был единственной общедоступной книгой, в которой последовательно изложены основы исследования операций.

Через несколько лет, в начале 50-х годов, было издано несколько сборников статей и докладов.

Первым учебником послевоенного времени, созданным на основе учебной программы и курса лекций, была книга Черчмена, Акофа, и Арнофа "Введение в исследование операций", которая получила широкое распространение и во многом содействовала установлению основной проблематики данной дисциплины.

Тем временем стали появляться книги, имеющие конкретную направленность, например: "Введение в теорию игр" Мак-Кинси, "Современный стратег" Дж.Вильямса, "Динамическое программирование" Р.Беллмана, "Игры и решения" Р.Льюса и Х.Райфы, "Линейное программирование (методы и приложения)" С.Гасса, "Теория графов и ее применения" К.Бержа, "Математические методы в теории игр, программировании и экономике" С.Карли- на, "Математические методы исследования операций" Т.Саати, а также ряд других книг.

К 1960 г. различные по научному уровню монографии и учебники стали появляться достаточно регулярно, а к 1965 г. поток книг стал весьма обильным и в течение последующих десяти лет не уменьшился.

Особого упоминания заслуживает вышедший в 1969 г. учебник Г.Вагнера "Основы исследования операций". Этой книге, получившей широкое распространение, в 1969 г. была присуждена премия Ланчестера, учрежденная Американским обществом по исследованию операций.

4.4. Профессиональное образование

В первые послевоенные годы большинство опытных специалистов по исследованию операций, как правило, считали область своей деятельности еще недостаточно подготовленной к реализации широкой программы официальных методов обучения. Наличие такого образования или же практический опыт исследований в конкретной области считались равнозначными факторами, и, пожалуй, предпочтение даже отдавалось второму фактору. Такое предпочтение было обусловлено большим практическим опытом первых исследователей в области исследования операций.

Однако организационные условия для подготовки специалистов были созданы достаточно быстро. В начале 50-х годов наиболее распространенной формой подготовки в ряде стран были краткосрочные курсы различной продолжительности, а в ряде мест была начата подготовка по университетской программе. В течение последующих десяти лет эти программы обучения стали более разнообразными и насыщенными, о чем свидетельствует материал. Так, по данным, содержащимся в отчете Американского общества по исследованию операций за 1973 г., в США насчитывалось не менее 53 университетских программ, в других странах наблюдалось аналогичное развитие официальных форм подготовки специалистов. Таким образом, в настоящее время студенту предлагаются широкие возможности выбора программы профессионального образования.

Подготовка в соответствии с этими официальными программами стала признаваться важным показателем квалификации специалиста при поступлении его на работу в данной области, будь это преподавание, научная работа или практическая деятельность.

Российское Научное общество Исследования операций (РНОИО)

Основано в 1996 году

Корни исследования операций уходят в далекую историю. Резкое увеличение размеров производства, разделение труда обусловило постепенную дифференциацию управленческого труда. Появилась необходимость в планировании материальных, трудовых и денежных ресурсов, в учете и анализе труда и выработке прогноза на будущее. В управленческом аппарате начали выделяться подразделения: отдел финансов, сбыта, бухгалтерии, планово экономический отдел и другие, принявшие на себя отдельные управленческие функции.

К этому периоду относятся первые работы по исследованию в области организации труда и управления - первые предвестники будущей науки.

Как самостоятельное научное направление исследование операций оформилось в начале 40-х годов.

Первые публикации по исследованию операций относятся к 1939-1940 гг, в которых методы применены для решения военных задач, в частности для анализа и исследования военных операций. Отсюда и пошло название дисциплины. Позднее принципы и методы исследования операций стали применяться в сфере промышленно финансового управления. С увеличением масштабов производства расширялись масштабы операционных исследований, круг решаемых задач,совершенствовались методы новой науки.

Возникла необходимость в подготовке кадров специалистов по исследованию операций - операционистов. В ведущих университетах США и Англии впервые было начато систематическое преподавание курса исследование операцийю

Возникла необходимость в координации работы многотысячной армии операционистов, в регулярном обмене теоретическими исследованиями и прикладными разработками.

С этой целью в 1957 г. была создана Международная федерация исследования операций IFORS , в состав которой входили национальные общества и комитеты по исследованию операций многих стран.

В создание современного математического аппарата и развитие многих направлений исследования операций большой вклад внесли российские ученые Л.В. Канторович, Н.П. Бусленко, Е.С. Вентцель, Н.Н. Воробьев, Н.Н. Моисеев, Д.Б. Юдин и многие другие. Особо следует отметить роль академика Л.В. Канторовича, который в 1939 г сформулировал новый класс условно-экстремальных задач и предложил универсальный метод их решения, положив начало новому направлению прикладной математики – линейному программированию.

Значительный вклад в формирование и развитие исследования операций внесли зарубежные ученые Р. Акоф, Р. Беллман, Г. Данциг, Г. Кун, Дж. Нейман, Т. Саати, Р. Черчмен, А. Кофман и др.

Предмет и цель исследования операций

Исследование операций - наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее оптимального управления организационными системами.

Предмет исследования операций - системы организационного управления или организации, которые состоят из большого числа взаимодействующих между собой подразделений не всегда согласующихся между собой и могут быть противоположны.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного

процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно

Цель исследования операций - <u>количественное</u> обоснование принимаемых решений по управлению организациями

Решение, которое оказывается наиболее выгодным для всей организации называется оптимальным, а решение наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям будет субоптимальным

1.2 Особенности исследования операций

- Системный подход к анализу поставленной проблемы.

Системный анализ является основным методологическим принципом исследования операций, который состоит в том. что любая задача, какой бы частной она не казалась, рассматривается сточки зрения ее влияния на критерий функционирования всей системы

- Для исследования операций характерно, что при решении каждой проблемы возникают все новые и новые задачи. Если сначала ставится узкие цели, применение операционных методов неэффективно. Наибольший эффект может быть достигнут только при непрерывном исследовании, обеспечивающем преемственность в переходе от одной задачи к другой.
- Одной из существенных особенностей исследования операций является стремление найти оптимальное решение поставленной задачи. Однако, часто такое решение оказывается недостижимым из-за ограничений, накладываемых имеющимися в

наличии ресурсами или уровнем современной науки. Например, для комбинаторных задач, в частности задач календарного планирования при числе станков более 4 оптимальное решение при современном уровне развития математики оказывается возможным найти лишь простым перебором вариантов. Однако даже при небольших n число возможных вариантов оказывается настолько велико, что перебор всех вариантов при существующих ограничениях на быстородействие ЭВМ и допустимое машинное время практически немыслимы

Тогда приходится ограничиваться поиском достаточно хорошего или субоптимального решения.

- Особенность операционных исследований состоит и в том, что они прводятся комплексно, по многим направлениям. Для проведения такого исследования создается операционная группа. В ее состав входят специалисты различных областей: инженеры, математики, экономисты, социологи, психологи.

---

3 Основные этапы операционного исследования

Постановка задачи.

Первоначально задачу формулируют с точки зрения заказчика. Во время анализа системы задача постепенно уточняется.

Формализация задачи.

Получив достаточно строгую и логически непротиворечивую, содержательную постановку задачи, нужно построить ее математическую модель.

Нахождение метода решения.

Для нахождения оптимального решения в зависимости от структуры задачи применяют те или иные методы теории оптимальных решений, называемые также методами математического программирования.

Проверка и корректировка модели.

В сложных системах, к которым относятся системы организационного типа, модель лишь частично отражает реальный процесс. Поэтому необходима проверка степени соответствия или адекватности модели и реального процесса. Проверку производят сравнением предсказанного поведения с фактическим при изменении значений внешних неуправляемых воздействий. Корректировка может потребовать дополнительных исследований объекта, уточнения структуры математической модели, многочисленных изменений переменных. Таким образом, 4 этапа многократно повторяются, пока не будут достигнуто удовлетворительное соответствие между выходами объекта и модели.

Реализация найденного решения на практике.

Внедрение можно рассматривать как самостоятельную задачу, применив к ней системный подход и анализ.

Классификация задач исследования операций по уровню информации о ситуации

1. Детерминированный уровень - наиболее простой уровень информации о ситуации - когда условия, в которых принимаются решения, известны полностью.
2. Стохастический уровень - уровень, при котором известно множество возможных вариантов условий и их вероятностное распределение.
3. Неопределенный уровень - уровень, когда известно множество возможных вариантов, но без какой либо информации об их вероятностях.

Для изучения различных экономических явлений экономисты используют их упрощенные формальные описания, называемые экономическими моделями. Строя модели, они выявляют существенные факторы, определяющие исследуемое явление, и отбрасывают детали, несущественные для решения поставленной проблемы.

Формализация основных особенностей функционирования экономических объектов позволяет оценить возможные последствия воздействия на них и использовать такие оценки в управлении.

Исследование операций – научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами.

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

• построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

• изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

Исследование операций, в частности в финансово-экономической сфере и бизнесе, помогает лицу, принимающему решение, произвести критический анализ ситуации и в результате более обоснованно и последовательно проводить определенную политику или стратегию поведения при решении сложных, комплексных проблем.

Существуют различные подходы к принятию решений:

– психологический, на основе метода аналогий;
– интуитивный, на основе предшествующего опыта;

на основе здравого смысла и т.п.

Однако принимать управленческие и иные решения в экономике, в сфере технологии производства, в финансовой области, в бизнесе и других отраслях хозяйства с помощью только личного опыта, здравого смысла и интуиции мало эффективно, а порой и ошибочно. Сложный характер рыночной экономики предъявляет более серьезные требования к обоснованию принятия решений, хотя и перечисленные нельзя абсолютно сбрасывать со счета. Одним из способов удовлетворения этих требований является постановка проблемы принятия решений на математическую основу. В этом нет ничего необычного, поскольку современная экономическая наука существенно опирается на математическое моделирование экономических процессов и пронизана различным математическим аппаратом, а применяющийся в ней математический язык позволяет более определенно и однозначно формулировать экономические факты и законы.

.

Контрольные вопросы

1. Расскажите о предпосылках, истории возникновение и развитие науки «Исследование операций»
2. Перечслите особенности дисциплины «исследование операций»
3. Дайте определение «исследование операций»
4. Пречислите основные этапы операционного исследования
5. Приведите классификацию задач исследования операций

Тема 2: Задачи линейного программирования:
2.1. Решение задач линейного программирования графическим методом

1. Формулировка задачи и ее геометрическое истолкование
2. Экономическая интерпретация задач линейного программирования
3. Анализ чувствительности задачи линейного программирования

1. Формулировка задачи и ее геометрическое истолкование

Задачи математического программирования – это задачи на поиск оптимального решения

Задача оптимизации:

f(x) → max (min), x ϵ X, где

X – допустимое множество,

f(x) – целевая функция

Если функция имеет линейный вид:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$

речь идет о задачи линейного программирования

<u>Основные понятия и обозначения:</u>

1. Любое x ϵ X называется ***допустимым решением***
2. Допустимое решение, дающее *max (min) f(x),* называется ***оптимальным решением (планом)***
3. Неравенства называются ***ограничениями***
4. Решение системы всех неравенств называется ***областью допустимых решений***

Наиболее часто встречаются две разновидности задач линейного программирования:

1. Каноническая (основная). Система ограничений, помимо тривиальных ограничений, включает в себя только уравнения.

2. Стандартная (симметричная). Система ограничений состоит только из неравенств

Стандартный вид:

$f(x) = -2x_1 + x_2 + 1 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 1 \geq 0 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq \end{cases}$$

Канонический вид:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

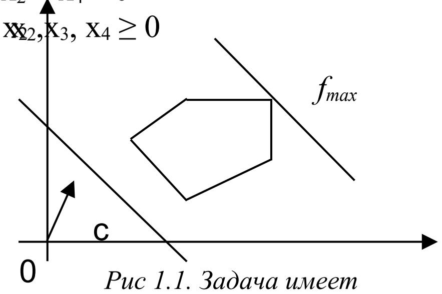


Рис 1.1. Задача имеет единственное решение

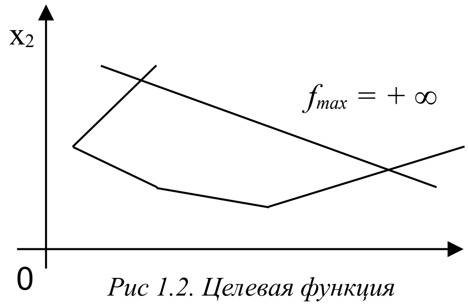


Рис 1.2. Целевая функция не ограничена

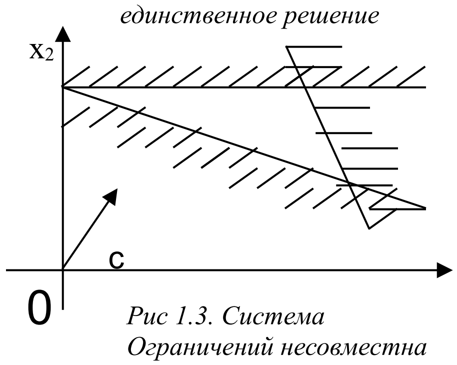
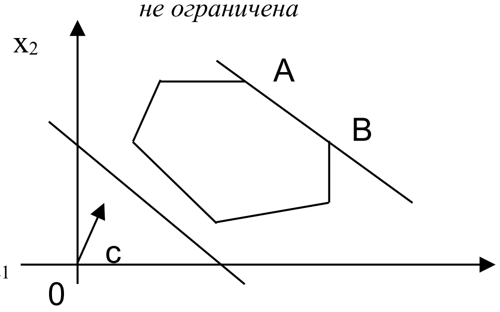


Рис 1.3. Система Ограничений несовместна



Пример решения задачи

Найти max и min функции $f(x) = x_1 + x_2$ при заданной системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Построим многоугольник решений*:*

Выразим x_2 через x_1:

$$\begin{cases} x_2 \le 4 - \frac{1}{2}x_1 \quad (1) \\ x_2 \le 4 + 2x_1 \quad (2) \\ x_2 \ge 3 - \frac{1}{3}x_1 \quad (3) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad (4) \end{cases}$$

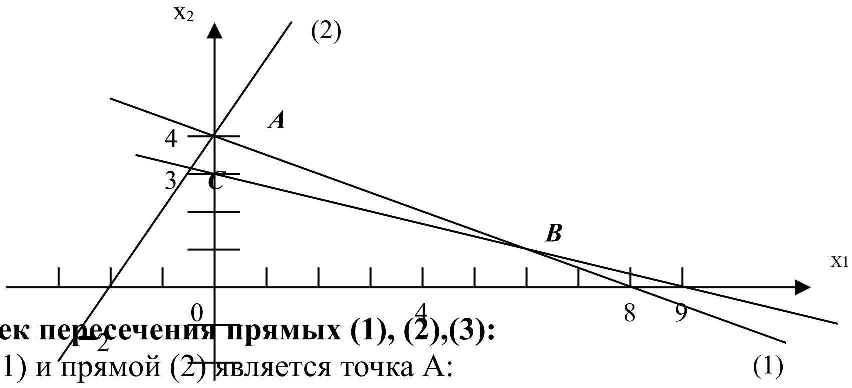
2. Построим графики функций:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_1 \\ x_2 = 4 + 2x_1 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{3}x_1 \end{cases}$$

x_1	0	8
x_2	4	0

x_1	-2	0
x_2	0	4

x_1	0	9
x_2	3	0



Найдем координаты точек пересечения прямых (1), (2),(3):

1. Пересечением прямой (1) и прямой (2) является точка А:

$4 - \frac{1}{2}x_1 = 4 + 2x_1$

$-\frac{1}{2}x_1 - 2x_1 = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Так, координаты точки А (0,4)
Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение функции в точке А $f(0,4) = 4$
2. Пересечением прямой (1) и прямой (3) является точка В:

$4 - \frac{1}{2}x_1 = 3 - \frac{1}{3}x_1$

$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_1 = 3 - 4$

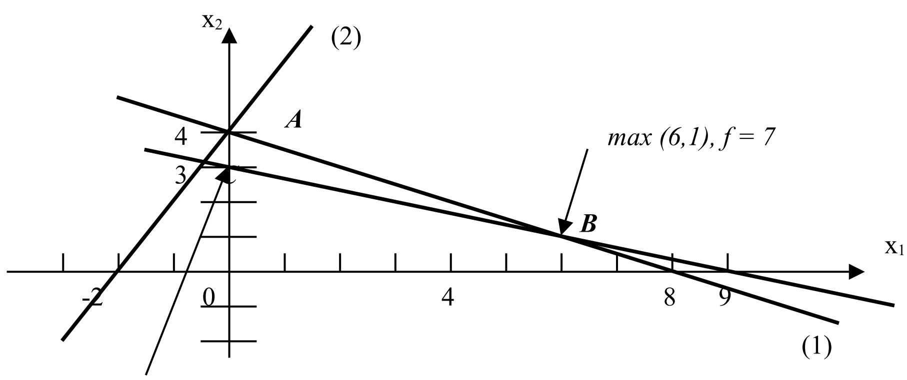
$-\frac{1}{6}x_1 = -1,\ x_1 = 6,\ x_2 = 1$

Так, координаты точки В (6;1)
Так как $F(x) = x_1 + x_2$*, то значение функции в точке А —* $F(6,1) = 9$

3. Т. к. по условию задачи

А линии (1) и (3) пересекаются там, где $x_1 < 0$,
То координаты точки С (0,3)
Так как $f(x) = x_1 + x_2$, то значение функции в точке С $f(0,3) = 3$

4. Так *max f(x)* в точке В, с координатами (6,1)



<u>Задача об использовании ресурсов (планировании производства)</u>

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Введем следующие обозначения:
x_j *— число единиц продукции* P_j*, запланированной к производству;*
b_i *— запас ресурса* S_i*,*
a_{ij} *— число единиц ресурса* S_i*, затрачиваемое на единицу продукции* P_j*,*
c_i *— прибыль от реализации продукции* P_j

Тогда <u>модель задачи</u> будет иметь вид:

$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \rightarrow max$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\ a_{11} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \leq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i \geq 0, i = 1 \div n \end{cases}$$

Прибыль от единицы продукции P_1 составляет 2 рубля, а от единицы продукции P_2

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурса, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	-	1
S_4	21	3	-

Экономико-математическая модель:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Задача о составлении рациона (технологическая задача)</u>

Необходимо составить такой дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Введем следующие обозначения:

x_j — число единиц корма j-го вода;

b_i — необходимый минимум содержания в рационе питательного вещества S_i,

a_{ij} — число единиц питательного вещества S i, в единице корма j-го вида,

c_i — стоимость единицы корма j-го вида

Тогда <u>модель задачи</u> будет иметь вид:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{11} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ x_i \geq 0, i = 1 \div n \end{cases}$$

Стоимость 1кг корма вида I – 4 рубля, а вида II – 6 рублей. Используя данные таблицы, необходимо составить такой рацион питания, чтобы стоимость была минимальной, а содержание каждого вида питательных веществ было не менее установленного предела.

Питатаельное	Необходимый	Число единиц птательного вещества в

вещество	минимум питательных веществ	1кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	3

Экономико-математическая модель:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)</u>

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить $n_1, n_2, \dots n_k$ единиц продукции $P_1, P_2, \dots P_k$. Продукция производится на станках $S_1, S_2, \dots S_m$. Для каждого станка известны производительность a_{ij} и затраты b_{ij} на

изготовление продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков, чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

<u>Экономико-математическая модель задачи</u>:

Обозначим x_{ij} — время в течение которого станок S_i будет занят изготовлением продукции

P_j

$$\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + \dots x_{1k} \leq T \qquad && a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots a_{m1}x_{m1} = n_1 \\ &x_{21} + x_{22} + \dots x_{2k} \leq T && a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots a_{m2}x_{m2} = n_2 \\ &\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_{m1} + x_{m2} + \dots x_{mk} \leq T && a_{1k}x_{1k} + a_{2k}x_{2k} + \dots a_{mk}x_{mk} = n_k \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{f(x) = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \dots + b_{mk}x_{mk} \rightarrow min}$$

3. Анализ чувствительностизадачи линейного программирования

ПЕРВАЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

На сколько сократить или увеличить запасы ресурсов?

1. На сколько можно увеличить запас некоторого ресурса для улучшения полученного оптимального значения целевой функции f?

2. На сколько можно снизить запас некоторого ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

Определите суточную производственную программу небольшого цеха по пошиву женской одежды. Требуется установить количество брюк и юбок, которые нужно сшить за сутки, если известны затраты на пошив этих изделий и их цена реализации на рынке. Суточный спрос на брюки не превышает 18шт. Доход должен быть максимальным

Производственные факторы	Расходы на 1 готовое изделие		Максимально возможной суточный запас
	брюк	юбки	
Ткань, м	1,5	2	42
Трудоемкость, чел/час	3	2	60
Накладные расходы, руб.	5	5	200
Цена 1 изделия, руб.	60	50	

Имеем задачу линейного программирования:

$f(x_1,x_2) = 60x_1 + 50x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2x_2 \le 42 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 5x_1 + 5x_2 \le 200 \\ x_1 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решим задачу графическим способом

Ограничения линейной модели классифицируют на:

- *связывающие*(активные) — прямые (1) и (2)
- *несвязывающие* (неактивные)

Прямая, представляющая связывающее ограничение должна проходить через оптимальную точку

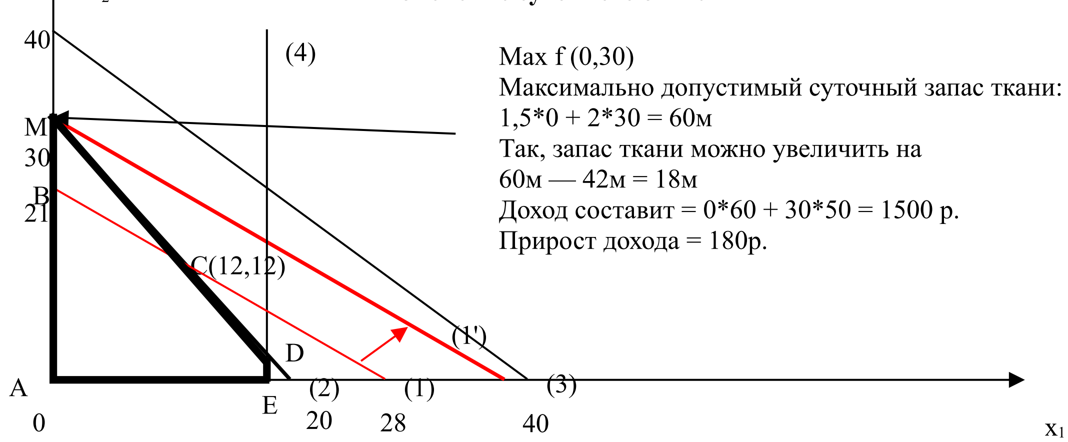
Если ограничение — связывающее, то соответствующий ему ресурс называется *дефицитным*

Ресурс, с которым ассоциировано несвязывающее ограничение — *недефицитный*

Ограничения, которые не участвуют в формировании пространства допустимых значений — *избыточные*

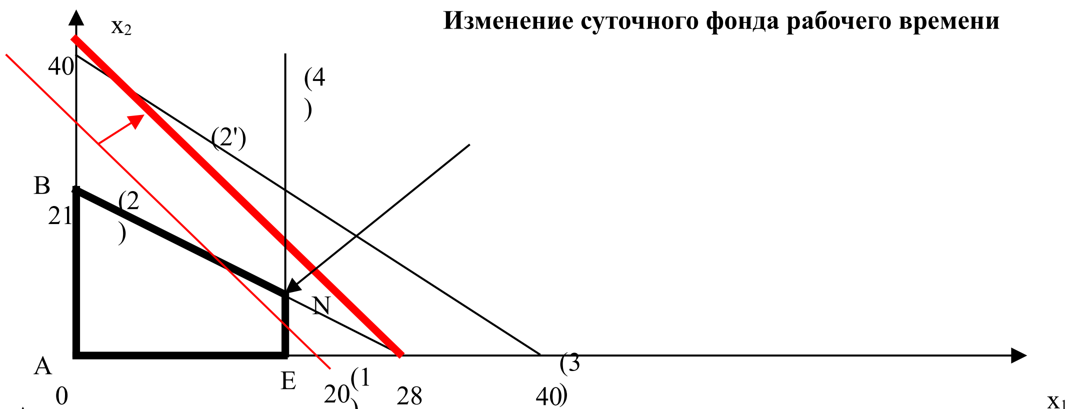
Анализ модели на чувствительность включает:
1) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;
2) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденного ранее оптимального значения целевой функции

Изменение суточного запаса ткани



Max f (0,30)
Максимально допустимый суточный запас ткани:
1,5*0 + 2*30 = 60м
Так, запас ткани можно увеличить на
60м — 42м = 18м
Доход составит = 0*60 + 30*50 = 1500 р.
Прирост дохода = 180р.

Изменение суточного фонда рабочего времени



Изменение суточного запаса средств на накладные расходы

Max f(12,12)
Требуемая величина суточных накладных расходов:
5*12+5*12 = 120руб
Так, снижение суточных расходов
120 — 200 = -80р
Доход составит = 12*60 + 12*50 = 1320 р
Прирост дохода = 0 р

Результаты проведенного исследования можно свести в таблицу:

Ресурсы	Тип ресурсов	Максимальное изменение запаса ресурсов	Максимально изменение дохода от реализации, р.
1	Дефицитный	60 — 42 = 18 м.	1500 — 1320 = 180 р.
2	Дефицитный	69 — 60 = 9 чел/ час	1455 — 1320 = 15 р.
3	Избыточный	120 — 200 = -80 руб.	1320 — 1320 = 0 р.
4	Недефицитный	12 -18 = - 6 шт	1320 -1320 = 0р

ВТОРАЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

Увеличение объема какого ресурса наиболее выгодно?

Пусть ценность дополнительной единицы ресурса i — y_i . Тогда величина y_i определяется из соотношения:
y_i = максимальное приращение оптимальногно значения дохода F / Максимально допустимый прирост ресурса I

Так, $y_1 = \dfrac{180\ руб}{18\ м} = 10$ *руб/м*

$\boldsymbol{y_2} = \dfrac{135\ руб}{9\ ч/ч} = \mathbf{15}$ *руб/чел-час*

ТРЕТЬЯ ЗАДАЧА НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ:

В каких пределах допустимо изменение коэффициентов функции?

1. Каков диапазон изменения того или иного коэффициента целевой функции,при котором не происходит изменения оптимального решения?

2. На сколько следует изменить тот или иной коэффициент целевой функции, чтобы изменить статус некоторого ресурса?

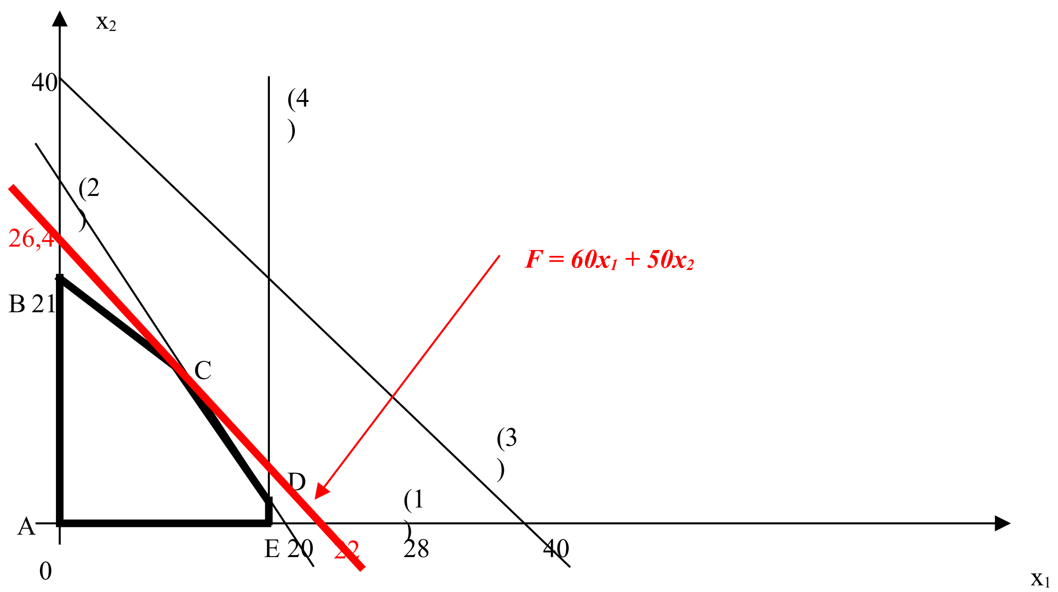
Построим график нашей целевой функции:

$$F = 60x_1 + 50x_2$$

Так, графиком целевой функции является прямая, проходящая через оптимальную точку C(12,12).

Прямая пересекает ось ординат в точке (0;26,4),

ось абсцисс в точке (22;0)



При изменении C_1 и C_2 график целевой функции вращается вокруг точки С:

Если C_1 увеличивается или C_2 уменьшается, прямая вращается по часовой стрелке

Если C_1 уменьшается или C_2 увеличивается, прямая вращается против часовой стрелки

Вычислим границы интервалов возможных колебаний C_1 и C_2, при которых С останется оптимальной.

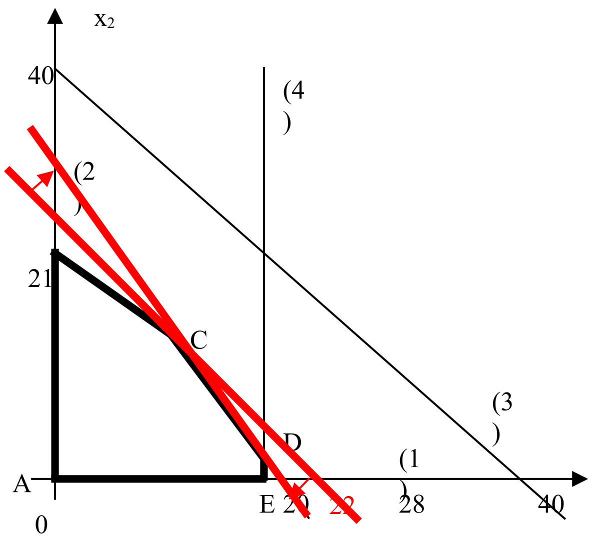
Зафиксируем $C_2 = 50$, тогда целевая функция:

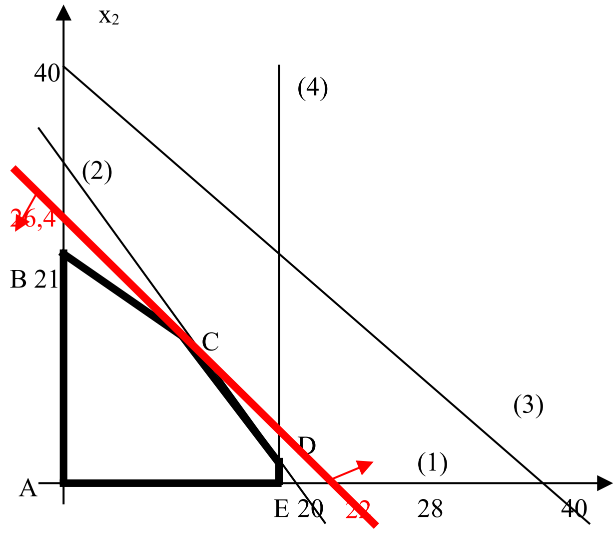
$C_1x_1 + 50x_2 = F$, $x2 = \frac{F}{50} - \frac{C1}{50} * x_1$, где $\frac{C1}{50}$ тангенс угла наклона прямой (1)

Точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон прямой не выйдет за пределы, определяемые наклонами прямых ограничений (1) и (2)

Тангенс угла наклона для прямой (1) равен $\frac{3}{4}$,

для прямой (2) равен $\frac{3}{2}$





Определим диапазон колебаний c_1:

$\frac{C1}{50} = \frac{3}{4}$, тогда $c_1 = 37{,}5$

$\frac{C1}{50} = \frac{3}{2}$, тогда $c_1 = 75$

Таким образом интервал изменения c_1,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $37{,}5 \le c_1 \le 75$
Зафиксируем $c_1 = 60$, тогда целевая функция:
$F = 60x_1 + c_2x_2$
$x_2 = \frac{F}{C2} - \frac{60}{c2} \cdot x_1$

$\frac{60}{c2} = \frac{3}{2}$, $c_1 = 40$

$\frac{60}{c2} = \frac{3}{4}$, $c_2 = 80$

Таким образом интервал изменения c_2,в котором точка с — единственная оптимальная, определяется неравенством $40 \le c_2 \le 80$
Как только $c_1 = 37{,}5$долл., ресурс (2) становится недефицитным. т. е., если доход от продажи одних брюк станет меньше 37,5 долл., надо пересматривать суточную производственную программу. Теперь $x_1 = 21$, $x_2 = 0$

Когда значение C_1 превысит 75 долл., суточная производственная программа будет предусматривать 18 брюк и 3 юбок (оптимальный план — точка D)

Тема 2 : Задачи линейного программирования:
2.2. Решение задач линейного программирования симплекс-методом, анализ и экономическая интерпретация полученных результатов

1. Алгоритм решения ЗЛП симплекным методом
2. Анализ чувствительности и симплек-метод
3. Анализ чувствительности ЗЛП с помощью средств MS EXcel

1. Алгоритм решения ЗЛП симплекным методом

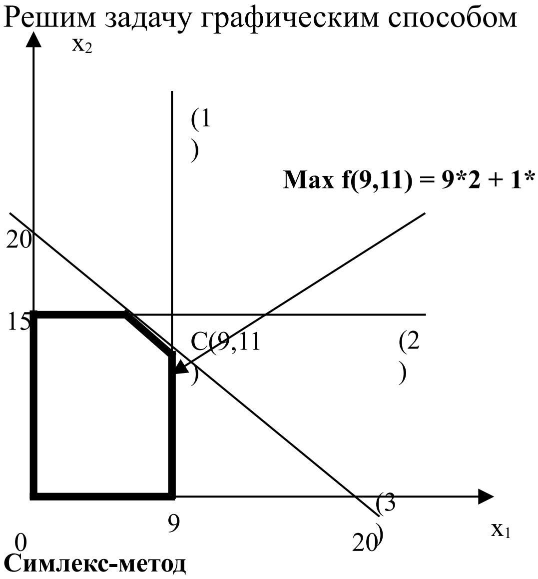
Решить задачу линейного программирования:

$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 \le 27 \\ 2x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Симплекс- методом.
Найти оптимальный производственный план и максимальную прибыль.
Определить свободный запас каждого ресурса

Решим задачу графическим способом



Симлекс-метод

Приведем систему неравенств к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 27 \\ 2x_2 + x_4 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

Шаг 1

Составим симплекс таблицу (**Первая симплекс-таблица)**:

Базисные переменные	Переменные x1	x2	S1	S2	S3	Правая часть b
S1	3	0	1	0	0	27
S2	0	2	0	1	0	0
S3	1	1	0	0	1	20
Целевая функция, р	-2	-1	0	0	0	0

Шаг 2. Определим ведущий столбец, строку и Ведущий элемент

Первая симплекс-таблица с учетом отношений

Базисные переменные	Переменные x1 x2 S1 S2 S3					Правая часть b	Отношения b| элемент вед.столбца
	x1	x2	S1	S2	S3		
S1	3	0	1	0	0	27	$\frac{27}{3}$ = 9 вед.строка
S2	0	2	0	1	0	0	$\frac{30}{0}$ = ∞
S3	1	1	0	0	1	20	$\frac{20}{1}$ = 20
Целевая функция, p	-2	-1	0	0	0	0	

Шаг 3. Разделим все элементы ведущей строки на ведущий элемент — 3.

Вторая симплекс-таблица

Базисные переменные	Переменные					Правая часть b	Отношения b| элемент вед.столбца
	x1	x2	S1	S2	S3		
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	9	Новая R1 = Прошлая R1* ведущий элемент
S2	0	2	0	1	0	30	Новая R2 = Прошлая R2 — 0 * Новая R1
S3	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	11	Новая R3 = Прошлая R3 — 1 * Новая R1
Целевая функция, p	0	-1	$\frac{2}{3}$	0	0	18	Новая P = Прошлая P - (-2) * Новая R1

Шаг 2 и 3 подвторяется до тех пор, пока не будет достигнута неотрицательность всех элементов целевой функции

Вторая симплекс-таблица с учетом отношений

Базисные переменные	Переменные					Правая часть b	Отношения b| элемент вед.столбца
	x1	x2	S1	S2	S3		
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	9	$\frac{9}{0}$ = ∞
S2	0	2	0	1	0	30	$\frac{30}{2}$ = 15
S3	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	11	$\frac{11}{1}$ = 11 вед.строка
Целевая функция, p	0	-1	$\frac{2}{3}$	0	0	18	

Третья, итоговая симплекс-таблица

Базисные переменные	Переменные x1	x2	S1	S2	S3	Правая часть b	Отношения b| элемент вед.столбца
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	9	Новая R1 = Прошлая R1 – 0 · Новая R3
S2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-2	8	Новая R2 = Прошлая R2 — 2 · Новая R3
x2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	11	Новая R3 = Прошлая R3 · ведущий элемент
Целевая функция, p	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	29	Новая P = Прошлая P - (-1) · Новая R3

Интерпретация итоговой симплекс-таблицы

Базисные переменные	Переменные x1	x2	S1	S2	S3	Правая часть b	
x1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	9	Значение x1
S2	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-2	8	Значение ресурса S2
x2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	11	Значение x2
Целевая функция, p	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	29	Максимальное значение прибыли

Ресурсы s_1 и s_3 расходуются полностью и являются дефицитными
Остаток ресурса $s_2 = 8$

Теневая цена для ограничения (1) составляет $\frac{1}{3}$, для ограничения (3) — 1

Если реализуется 1кг ресурса s_1 сверх нормы, прибыль возрастет на $\frac{1}{3}$ у.е.

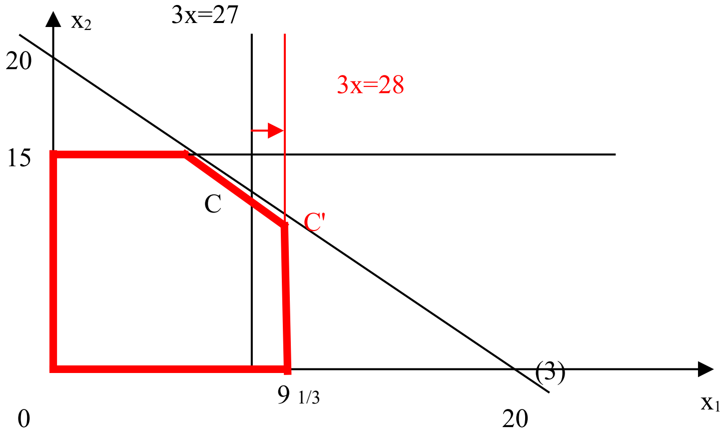
2. Анализ чувствительности и симплекс метод

Пользуясь данными полученной итоговой симплекс-таблицы определим:
1. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса S1 в количестве 1 кг
2. Влияние на оптимальное решение задачи сверхнормативного запаса ресурса S1 в количестве 2 кг
3. Влияние на оптимальное решение задачи умеличение запаса ресурса S3 на 5 кг
4. Максимальное дополнительное количество ресурса S3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса
5. Влияние на оптимальное решение задачи уменьшение запаса ресурса S1 в количестве 2кг

1. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при наличии 1 кг ресурса S1 дополнительно)

Базисные	Переменные	Правая часть, модифицированные b

переменные	x1 x2 S1 S2 S3	
x1	1/3	$9 + (\frac{1}{3}) = 9\frac{1}{3}$
S2	2/3	$8 + (\frac{2}{3}) = 8\frac{2}{3}$
x2	-1/3	$11 - (\frac{1}{3}) = 10\frac{2}{3}$
Целевая функция, p	1/3	$29 + (\frac{1}{3}) = 29\frac{1}{3}$



2. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при наличии 2 кг ресурса S1 дополнительно)

Базисные переменные	Переменные x1 x2 S1 S2 S3	Правая часть, модифицированные b
x1	$\frac{1}{3} \cdot 2$	$9 + 2\cdot(\frac{1}{3}) = 9\frac{2}{3}$
S2	$\frac{2}{3} \cdot 2$	$8 + 2\cdot(\frac{2}{3}) = 9\frac{1}{3}$
x2	$-\frac{1}{3} \cdot 2$	$11 - 2\cdot(\frac{1}{3}) = 10\frac{1}{3}$
Целевая функция, p	$\frac{1}{3} \cdot 2$	$29 + 2\cdot(\frac{1}{3}) = 29\frac{2}{3}$

3. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при увеличении на 5 кг ресурса S3)

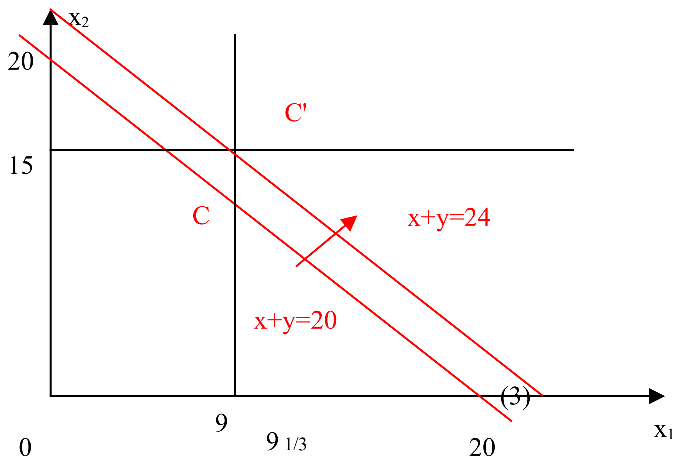
Базисные переменные	Переменные x1 x2 S1 S2 S3	Правая часть, модифицированные b
x1	$0\cdot 5$	9 + 0 = 9
S2	$-2\cdot 5$	8 + (-10) = -2
x2	$1\cdot 5$	11 + (5) = 16
Целевая функция, p	$1\cdot 5$	29 + (5) = 34

4. Для определения максимального дополнительного количества ресурса S3, которое используется полностью и не приводит к созданию излишка ресурса приравняем значения столбца S3 к нулю:

$8 + (-2 \cdot r) = 0$, так $r = 4$ кг.

т. е. Ограничение (3) будет иметь вид:

$X + y = 24$



5. Модифицированные элементы итоговой симплекс-таблицы (при уменьшении 2 кг ресурса S1)

Базисные переменные	Переменные x1 x2 S1 S2 S3	Правая часть, модифицированные b
x1	$\frac{1}{3} \cdot 2$	$9 — (\frac{2}{3}) = 8\frac{1}{3}$
S2	$\frac{2}{3} \cdot 2$	$8 — (\frac{4}{3}) = 6\frac{2}{3}$
x2	$-\frac{1}{3} \cdot 2$	$11 - (-\frac{2}{3}) = 11\frac{2}{3}$
Целевая функция, p	$\frac{1}{3} \cdot 2$	$29 — (\frac{2}{3}) = 28\frac{1}{3}$

3. **Анализ чувствительности ЗЛП с помощью средств MS Excel**

Рассмотрим следующую ЗЛП:

$f(x) = 7{,}5x1+3x2+6x3+12x4 \rightarrow max$

$2x1+x2+0{,}5x3+4x4 \leq 2400$

$x1+5x2+3x3 \leq 1200$

$3x1+6x3+x4 \leq 2000$

$x1,2,3,4 \geq 0.$

Начнём с отчёта результатов. Приведём его вид:

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$G$4	ЦФ	0,000	7884,298

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходно	Результат
$B$4	продуктA	0,000	0,000
$C$4	продуктB	0,000	148,760
$D$4	продуктC	0,000	152,066
$E$4	продуктD	0,000	543,802

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
$F$12	ограничениеI	2400,000	$F$12<=$H$12	связанное	0
$F$13	ограничениеII	1200,000	$F$13<=$H$13	связанное	0
$F$14	ограничениеIII	2000,000	$F$14<=$H$14	связанное	0
$B$4	продуктA	0,000	$B$4>=0	связанное	0,000
$C$4	продуктB	148,760	$C$4>=0	не связан.	148,760
$D$4	продуктC	152,066	$D$4>=0	не связан.	152,066
$E$4	продуктD	543,802	$E$4>=0	не связан.	543,802

Т.к. все ограничения на ресурсы являются связанными, то это говорит о том, что все ресурсы были использованы. Другими словами, все ресурсы являются дефицитными.

Рассмотрим отчёт по устойчивости:

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$4	продуктA	0,000	-0,062	7,5	0,061983471	1E+30
$C$4	продуктB	148,760	0,000	3	7,5	0,391304348
$D$4	продуктC	152,066	0,000	6	31,8	0,178571429
$E$4	продуктD	543,802	0,000	12	1,5	0,135135135

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$12	ограничениеI	2400,000	2,628	2400	1840	2193,333333
$F$13	ограничениеII	1200,000	0,074	1200	10966,66667	782,6086957
$F$14	ограничениеIII	2000,000	0,744	2000	1500	920

английского: cost reduction – уменьшение затрат) представляет собой дополнительные двойственные переменные. Они показывают, насколько по модулю уменьшится целевая функция при принудительном выпуске единицы данной продукции. В нашем примере нормированная стоимость по продукту A не равна нулю. Следовательно, если мы будем принудительно выпускать единицу продукта A, то целевая функция уменьшится на 0,062. Другими словами, выпуск продукта A является нерентабельным (неприбыльным).

Допустимое увеличение показывает, насколько максимально можно увеличить коэффициент целевой функции (цену продукта), чтобы структура оптимального плана осталась прежней. Допустимое уменьшение, наоборот, показывает, насколько можно максимально уменьшить коэффициент ЦФ, чтобы осталась прежней структура оптимального плана. Например, в нашей задаче, чтобы выпуск продукта А оставался нерентабельным, максимально допустимое увеличение его цены составляет приблизительно 0.06. Допустимое же уменьшение представляет собой огромное число. Это понятно, т.к., ещё больше уменьшив цену нерентабельного продукта, сделать его рентабельным невозможно.

Теневая цена в отчётах Excel представляет собой двойственные переменные. Они показывают, как изменится целевая функция при изменения запаса ресурса на единицу. Понятно, что если ресурс использован полностью, то теневая цена этого ресурса положительна. Например, если мы увеличим запас ресурса I на единицу, то ЦФ возрастёт на 2,628 (ресурс I является самым приоритетным). Допустимое увеличение и уменьшение показывают границы, в которых могут изменяться ресурсы, чтобы структура оптимального решения, т.е. номенклатура выпускаемой продукции, остались без изменений.

Ячейка	Имя	Целевое значение
$G$4	ЦФ	7884,298

Ячейка	Имя	Изменяемое значение	Нижний предел	Целевое результат	Верхний предел	Целевое результат
$B$4	продуктA	0,000	0,000	7884,298	0,000	7884,298
$C$4	продуктB	148,760	0,000	7438,017	148,760	7884,298
$D$4	продуктC	152,066	0,000	6971,901	152,066	7884,298
$E$4	продуктD	543,802	0,000	1358,678	543,802	7884,298

В отчёте указаны значения ЦФ при выпуске данного типа продукции на нижнем и верхнем пределах. Так, значение ЦФ 6971,901 соответствует тому, что продукт С не выпускается.

Отчёты Excel обеспечивают всей необходимой информацией для проведения полного анализа линейной модели.

Тема 2 : Задачи линейного программирования:
2.3. Двойственные задачи линейного программирования: особенности, алгоритм решения, анализ элементов

$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \le b_3 \\ x_i \ge 0, i = 1 \div n \end{cases}$$

$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \to min$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \ge c_1 \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \ge c_2 \end{cases}$$

$Y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Каждой задаче линейного программирования соответствует задача **двойственная** / **сопряженная** по отношению к исходной задаче

b_i — запас ресурса S_i, a_{ij} — число единиц потребляемого ресурса Si при производстве единицы продукции Pj

y_1, y_2, y_3 -цены на ресурсы

Затраты на закупку этих ресурсов должны быть минимальными, т. е.:

$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \to min$

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие могло получить при переработке ресурсов в готовую продукцию.

На изготовление продукции P_1 расходуется a_{11} ресурса S_1, a_{21} ресурса S_2, a_{31} ресурса S_3. Следовательно:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \ge c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \ge c_2 \end{cases}$$

Цены на ресурсы величины не могут быть отрицательными, значит

$Y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Формулировка двойственной задачи:

Найти такой набор оценок ресурсов, при которых общие затраты а ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее выручки с реализации этой продукции

Свойства взаимно двойственных задач:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, а в другой минимум.
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче на максимум все неравенства вида « $\le$ », а в задаче на минимум — все неравенства вида « $\ge$ ».
4. Матрица коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспортированными друг к другу
5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.
6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Пример решения задачи.

Составить двойственную задачу для заданной.

Дана целевая функция $f(x) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow max$

И система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведем систему неравенств к правильному виду (чтобы все знаки неравенств соответствовали задаче на максимум):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Тема 2 : Задачи линейного программирования:
2.4. Транспортная задача в экономике предприятия

1. Алгоритм решения транспортной задачи
2. Задача о назначениях,
3. Задача коммивояжера
4. Экономические задачи, сводящиеся к транспортной модели:
   4.1. Оптимальное распределение оборудования;
   4.2. Формирование оптимального штата фирмы;
   4.3. Задача календарнонго планирования производства;

1. Алгоритм решения транспортной задачи:

Применение алгоритма транспортной задачи требует выполнение следующих предпосылок:

1. Должна быть известна стоимость перевозки единицы продукцт из каждого пункта производства в каждый пункт назначения.
2. Должен быть известен запас продуктов в каждом пункте производства
3. Известны потребности в продуктах в каждом пункте потребления

Общее предложение долджно быть равно общему спросу

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из 4 этапов:

Этап 1. Представление данных в форме стандартной таблицы и поиск любого допустимого распределения ресурсов.

Допустимым называется такое распределение ресурсов, которое позволяет удовлетворит весь спрос в пунктах назначения и вывезти весь запас продуктов из пунктов производства

Этап 2. Проверка полученного распределения ресурсов на оптимальность.

Этап 3. Если полученное распределение ресурсов не является оптимальным, то ресурсы перераспределяются, снижая стоимость траспортировки

Этап 4. Повторная проверка оптимальности полученного распределения ресурсов

Пример задачи.

Три торговых склада P, Q, R – могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4 и 8 единиц соответственно. Величины спроса трех магазинов розничной торговли, находящихся в пунктах A, B и C, на это изделие равны 3, 5 и 6 единицам соответственно. Какова минимальная стоимость транспортировки изделий от поставщиков потребителям? Единичные издержки транпортировки приведены в табл.:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу			Общий объем предложения
	A	B	C	
P	10	20	5	9
Q	2	10	8	4
R	1	20	7	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	

Решение   Сбалансированная транспортная таблица:

Поставщик	Транспорт. издержки для магазинов, у.е. за единицу				Общий объем предложения
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
Q	2	10	8	0	4
R	1	20	7	0	8
Общий объем спроса	**3**	**5**	**6**	7	**21**

Метод 1. Метод минимальной стоимости

1. В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное кол-во продукта
2. Производится корректировка оставшихся объем предложения и потребностей
3. Выбирается след.клетка с наименьшей стоимостью, в которую помещается наибольшее возможное количество продукта, и т. д. До тех пор, пока спрос и предложение не станут равными нулю
4. Если наименьшее значение стоимости соответствует более чем одной клетки таблицы, выбор осуществляется случайным образом.

Начальное распределение ресурсов, полученное методом минимальной стоимости

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	- $\boxed{10}$	- $\boxed{20}$	2 $\boxed{5}$	7 $\boxed{0}$	~~9~~ ~~2~~ 0
Q	- $\boxed{2}$	4 $\boxed{10}$	- $\boxed{8}$	0 $\boxed{0}$	~~4~~ 0
R	3 $\boxed{1}$	1 $\boxed{20}$	4 $\boxed{7}$	0 $\boxed{0}$	~~8~~ ~~5~~ ~~1~~ 0
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~ 0	~~6~~ ~~4~~ 0	7 0	21

Стоимость = (3*1) + (4*10) +(1*20) + (2*5) + (4*7) +(7*0) = 101

Метод Вогеля.

Основан на «штрафной стоимости». Штрафная стоимость для каждой строки и столбца — разность между наиболее дешевым маршрутом и следующим за ним с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Суть метода состоит в минимизации штрафов.

Алгоритм:

1. Вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и столба
2. Выбрать строку или столбец с наибольшим значением штрафной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости перевозки для данной строки и столбца помещается наибольшее количество продукта.
3. Провести корректировка итоговых значений по строкам и столбцам таблицы
4. В строках или столбцах, где предложение или спрос равны нулю ставится прочерк

5. Произвести возврат к шагу 1 и пересчитать штрафные стоимости без учета клеток, где указаны перевозки, или клеток, где стоит прочерк

Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля

Торговый склад	Розничный магазин				Общее Предл.	Штрафная Стоимость 1 2 3
	A	B	C	Фиктивный		
P	- $\boxed{10}$	1 $\boxed{20}$	6 $\boxed{5}$	2 $\boxed{0}$	~~9 8 2~~ 0	5 5 5
Q	- $\boxed{2}$	4 $\boxed{10}$	- $\boxed{8}$	- $\boxed{0}$	~~4 0~~	2 - -
R	3 $\boxed{1}$	- $\boxed{20}$	- $\boxed{7}$	5 $\boxed{0}$	~~8 5 0~~	1 2 7
Общая потребность	~~3~~ 0	~~5~~ ~~1~~ 0	~~6~~ 0	~~7 2~~ 0	21	
1-й штраф	1	10	2	0		
2-й штраф	9	0	2	0		
3-й штраф	-	0	2	0		

Этап 2 решения транспортноний задачи

Проверка на оптимальность

1. Если решение оптимально, количество заполненных клеток будет (m+n-1), где
M — кол-во торговых складов
N — кол-во розничных магазинов

2. Если условие п.1 выполняется применяют 2 метода проверки на оптимальность:
Метод 1 — Метод ступенек
Метод 2 — Метод МОДИ (модифицированых распределений)

Проверка начального распределения перевозок на оптимальность — **метод ступенек**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	+11 $\boxed{10}$	+2 $\boxed{20}$	2 $\boxed{5}$	7 $\boxed{0}$	9
Q	+11 $\boxed{2}$	4 $\boxed{10}$	+11 $\boxed{8}$	+8 $\boxed{0}$	4
R	3 $\boxed{1}$	1 $\boxed{20}$	4 $\boxed{7}$	-2 $\boxed{0}$	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Метод МОДИ основан на вычислении теневых цен

Теневые цены для каждой пустой (небазисной) клетки можно найти из соотношения:

$S_{ij} = c_{ij} — (u_i + v_j)$

Где u_i — компонента, соответствующая строке,

v_j — компонента, соответствующая столбцу

i, j — номер строки и столбца

Эта теневая цена отражает дополнительную стоимость транспортировки единицы изделия из пункта i в пункт j.

Если все теневые цены положительны или равны нулю ($S_{ij} \geq 0$), то решение оптимально

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ для заполненной клетки (P, C)

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ для заполненной клетки (P, фиктивный)

$C_{33} = 7 = u_3 + v_3$ для заполненной клетки (R,C)

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ для заполненной клетки (R,A)

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ для заполненной клетки (R,B)

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ для заполненной клетки (Q,B)

Пусть u1 = 0. Следовательно $v_3 = 5$, $v_4 = 0$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = 18$, $u_2 = -8$

Подставим полученные значения в $S_{ij} = c_{ij} — (u_i + v_j)$ и получим теневые цены:

$S_{11} = 10 — (0 + (-1)) = +11$ для пустой клетки (P, A)

$S_{12} = 20 — (0 + 18) = +2$ для пустой клетки (P, B)

$S_{21} = 2 - (-8 — 1) = +11$ для пустой клетки (Q A)

$S_{23} = 8 - (-8 + 5) = +11$ для пустой клетки (Q, C)

$S_{24} = 0 - (-8 + 0) = +8$ для пустой клетки (Q, фиктивный)

$S_{34} = 0 — (2 + 0) = -2$ для пустой клетки (R, фиктивный)

Полученные значения заносятся в транспортную таблицу:

Применение метода МОДИ для проверки на оптимальность начального распределения перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	+11 10	+2 20	2 5	7 0	9
Q	+11 2	4 10	+11 8	+8 0	4
R	3 1	1 20	4 7	-2 0	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Этап 3. Поиск оптимального решения

1. Если транспортная таблица содержит более 1 пустой клетки с отрицательным значением теневой цены, то выбирается та, которой соответствует наибольшее значение по

абсолютной величине

2. Строится ступенчатый цикл
3. Выявляются клетки, количество перевозок в которых необходимо сократить и определение величины этих сокращений таким образом, чтобы ни одно из значений перевозок не оказалось отрицательным

Ступенчатый цикл для (R, фиктивный)

	C	Фиктивный
P	+ $\boxed{5}$ 2	- $\boxed{0}$ 7
R	- $\boxed{7}$ 4	+ $\boxed{0}$ -2

Перераспределение перевозок

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	$\boxed{10}$ -	$\boxed{20}$ -	$\boxed{5}$ 2 + 4	$\boxed{0}$ 7 - 4	9
Q	$\boxed{2}$ -	$\boxed{10}$ 4	$\boxed{8}$ -	$\boxed{0}$ -	4
R	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{20}$ 1	$\boxed{7}$ 4 -4	$\boxed{0}$ 0 +4	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Проверим данное решение на оптимальность методом МОДИ:

$C_{13} = 5 = u_1 + v_3$ *положим u1 = 0, тогда* $v_3 = 5$

$C_{14} = 0 = u_1 + v_4$ $v_4 = 0$

$C_{34} = 0 = u_3 + v_4$ $u_3 = 0$

$C_{31} = 1 = u_3 + v_1$ $v_1 = 1$

$C_{32} = 20 = u_3 + v_2$ $v_2 = 20$

$C_{22} = 10 = u_2 + v_2$ $u_2 = -10$

Так, теневые цены соответствующие пустым клеткам будут равны:

$S_{11} = 10 — (0 + 1) = +9$

$S_{12} = 20 — (0 + 20) = 0$

$S_{21} = 2 - (-10 + 1) = +11$

$S_{23} = 8 - (-10 + 5) = +13$

$S_{24} = 0 - (-10 + 0) = +10$

$S_{34} = 7 — (0 + 5) = +2$

т. к. ни одно из значений теневых цен не отрицательно, полученное решение является оптимальным

Минимальная стоимость равна:
101 + (4*(-2)) = 93

2. Задача о назначениях

Особенность задачи о назначениях:

1. Число пунктов производства равно числу пунктов назначения. Транспортная таблица имеет форму квадрата

2. В каждом пункте назначения объем потребности равен 1. Величина предложения каждого пункта производства равна 1

Этап 2

1. Найти строку, содержащую только 1 нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить 1 элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости

2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца

3. Повторять п.1 и 2 до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным

Этап 3

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице

2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые

4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых

5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения

Пример решения задачи о назначениях

Некоторая компания имеет 4 сбытовые базы и 4 заказа, которые необходимо доставить потребителям. Каждое складское помещение может разместить 1 заказ. Расстояние между складами и потребителями указаны в таблице. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной

Торговая база	Расстояние, миль до потребителей			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Выявление наименьших элементов по строкам

Торговая база	Расстояние, миль до потребителей				Наименьший элемент строки
	I	II	III	IV	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам

0	4	7	15
0	4	2	7
3	5	0	10
7	2	0	5
0	2	0	5

Наименьший элемент столбца

Вычитание наименьшего элемента по столбцам

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

Назначение в клетки с нулевыми значениями

$\boxed{0}$	2	7	10
~~0~~	2	2	2
3	3	$\boxed{0}$	5
7	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~

Проведение прямых через нулевые элементы

0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

Скорректированная таблица с назначением для нулевых клеток

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	~~0~~	7	8
B	~~0~~	$\boxed{0}$	2	~~0~~
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	~~0~~	2	$\boxed{0}$

Первое альтернативное решение

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	~~0~~	7	8
B	~~0~~	~~0~~	2	$\boxed{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	$\boxed{0}$	2	~~0~~

Второе альтернативное решение

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	8
B	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2	$\cancel{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	$\cancel{0}$	2	$\boxed{0}$

Минимальная дальность перевозок для каждого из трех решений:
Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 = 208 миль
Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 миль
Решение 3: 72 + 56 + 35 + 45 = 208 миль
Общая дальность для всех трех решений одинакова

3. Задача коммовияжера

Имеется n городов, занумерованных числами 1,2,...,n. Для любой пары городов (i,j) задано расстояние (время, путевые расходы) $C(i,j) \geq 0$ между ними. Поэтому в общем случае $C(i,j) \neq C(j,i)$. Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города по одному разу и вернуться в исходный город. Необходимо определить такую последовательность объезда городов, при которой длина маршрута была бы минимальной.

Другая интерпретация этой задачи связана с минимизацией времени переналадок при обработке на одном станке партии из n различных деталей. Здесь C(i,j) - время переналадки при переходе от обработки детали i к обработке детали j. Требуется найти последовательность обработки деталей, минимизирующую общее время переналадок.

Для записи постановки задачи в терминах целочисленного линейного программирования определим булевы переменные следующим образом: $x_y = 1$, если коммивояжер переезжает и i-го города в j-й; $x_y = 0$, в противном случае. Тогда задача заключается в отыскании значений переменных x_y удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1,...,m \text{ (въезд в город j)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1,...,n \text{ (въезд из города ij)}$$

$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1$ ($i \neq j$) (

$x_{ij} = \{0,1\}$, $u_i \geq 0$, целые, i=1,...,m, j=1,...,n

Ограничения требуют, чтобы маршрут образовывал контур.

4. Экономические задачи, сводящиеся к транпортной модели
4.1. Оптимальное распределение оборудования

Оборудование m различных видов нужно распределить между n рабочими участками. Производительность единицы оборудования i-го вида на j-м рабочем участке равна p_{ij};; i = 1,…,m; j = 1,…,n. Потребность j-го участка в оборудовании составляет b_j , j = 1,…,n. Запас оборудования i-го вида равен a_i , i = 1,…,m. Найти распределение оборудования по рабочим участкам, при котором суммарная производительность максимальна.

Данная задача относится к классу транспортных задач при условии, что производительность линейно зависит от количества используемого оборудования. Поставщиками в задаче являются различные виды оборудования, потребителями – рабочие участки.

4.2. **Формирование оптимального штата фирмы.**

Фирма набирает штат сотрудников. Она располагает n группами различных должностей по b_j вакантных единиц в каждой группе, j = 1,…,n. Кандидаты для занятия должностей проходят тестирование, по результатам которого их разделяют на m групп по a_i кандидатов в каждой группе, i = 1,…,m. Для каждого кандидата из i-ой группы требуются определенные затраты c_{ij} на обучение для занятия j-ой должности, i=1,…,m; j=1,…,n. (В частности, некоторые c_{ij} = 0, т.е. кандидат полностью соответствует должности, или $c_{ij} = \infty$, т.е. кандидат вообще не может занять данную должность.) Требуется распределить кандидатов на должности, затратив минимальные средства на их обучение.

Предположим, что общее число кандидатов соответствует числу вакантных должностей. (Если это не так, то следует просто проделать преобразование раздела 4.1.) Тогда данная задача соответствует транспортной модели. В роли поставщиков выступают группы кандидатов, а в роли потребителей – группы должностей. В качестве тарифов на перевозки рассматриваются затраты на переобучение.

4.3. **Задача календарного планирования производства.**

Рассмотрим задачу календарного планирования производства на N последовательных этапах. Спрос изменяется во времени, но детерминирован. Спрос можно удовлетворить либо путем изменения уровня запаса при постоянном объеме производства, либо за счет изменения объема производства при постоянном уровне запаса, либо путем изменения и уровня запаса, и выпуска. Изменения объема производства можно добиться, проводя сверхурочные работы, а изменения уровня запаса можно обеспечить за счет создания постоянного положительного запаса, либо за счет неудовлетворенного спроса.

Нужно отыскать календарный план производства на N этапов, минимизирующий суммарные затраты. В модели предполагаются нулевые затраты на оформление заказа для любого этапа. В общем случае допускается дефицит при условии, что весь задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу этапа N. Эти условия можно записать в виде транспортной задачи.

Тема 3: Модели динамического программирования и сетевого планирования в экономике

1. Сетевая модель и ее основные элементы
2. Правила построения сетевых графиков

1. Сетевая модель и ее основные элементы

Граф – конструкция из вершин и ребер
Вершины – точки
Ребра – соединяющие линии
Граф называется Эйлеровым, если существует путь, позволяющий прийти в ту же вершину, из которой вышли, пройдя по каждому ребру, только один раз.

Граф называется Гамильтоновым, если существует
путь, позволяющий обойти все вершины, заходя в каждую только один раз

Деревом называется граф, любые две вершины которого соединены только одним ребром

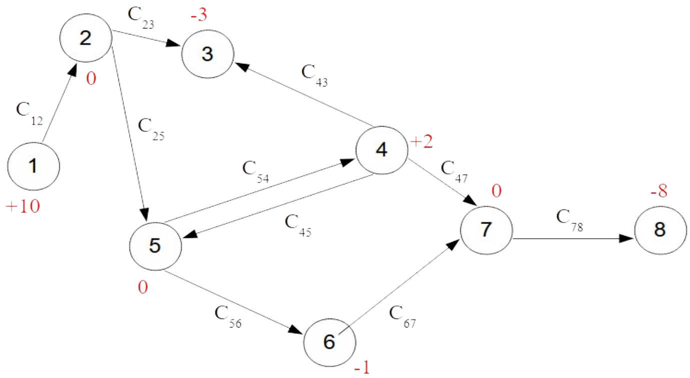


Схема перевозок товаров между складами

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в форме сети, изображение которой называется **сетевым графиком**

Основное назначение Сетевого планирования и управления (СПУ):
- формирование календарного плана реализации комплекса работ;
- принятие эффективных решений в процессе выполнения этого плана

Главные элементы сетевой модели:
- события (обозначаются вершинами графов)
- работы (дуги)

Событие — это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта

Событие исходное (начальное) – не имеет
предшествующих работ и событий,

Событие завершающее (конечное) – не имеет
последующих работ и событий
Работа может быть трех видов:

1) **действительная работа** – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов;

2) **ожидание** – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда;

3) **<u>фиктивная работа (зависимость)</u>** – логическая связь между двумя или несколькими работами, не требующими затрат труда, материальных ресурсов и времени.
<u>Путь</u> - любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за
ней работы.

<u>Полный путь (L)</u> – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется **<u>критическим.</u>**
<u>Критическими</u> называются работы и события, расположенные на критическом пути.

Длина критического пути называется критическим временем (сроком) сетевого графика (Ткр).

Критическое время – это наименьшее
время выполнения всего комплекса работ.

Сетевой график может иметь несколько различных критических путей, но все они имеют одну и ту же длину

2. Правила построения сетевых графиков
1. В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий (из которых не выходит ни одна работа,за исключением завершающего события)
2. В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий (которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного).
3. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, (путей, соединяющих некоторые события с ними же самими)
4. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой.
5. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.
6. Сетевой график должен быть упорядочен.

<u>Временные параметры сетевых графиков</u>

<u>Параметры событий:</u>

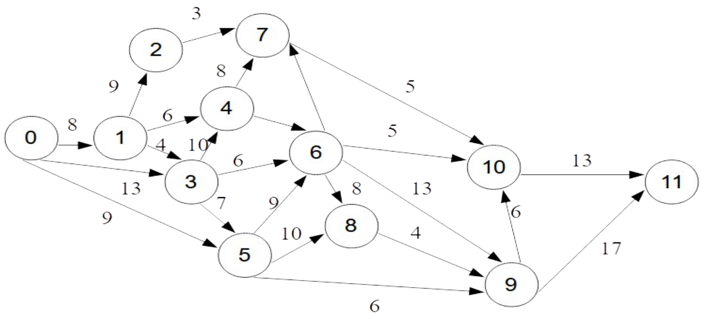
- ранний срок свершения i-го события
$t_p(j) = max_{i,j}[t_p(i) + t(j,i)]$

- поздний (предельный)срок свершения i-го события
$t_n(i) = min_{i,j}[t_n(j) — t(j,i)]$

- резерв времени R(i)го события
$R(i) = t_n(i) - t_p(j)$

<u>Параметры работ:</u>
- ранний срок $t_{рн}(i,j)$ начала работы *(i,j)* совпадает с ранним сроком наступления начального события *i:* $\boldsymbol{t_{рн}(i,j) = t_p(i)}$
- ранний срок $t_{ро}(i,j)$ *окончания работы (i,j):*
$\boldsymbol{t_{ро}(i,j) = t_p(i) + t(j,j)}$
- поздний срок $t_{по}$(i,j) окончания работы (i,j) совпадает с поздним сроком конечного события
$\boldsymbol{t_{по}(i,j) = t_n(j)}$
- поздний срок $t_{пн}(i,j)$ начала работы (j,j):
$\boldsymbol{t_{пн}(i,j) = t_n(i) — t(i,j)}$
- резерв времени пути $\boldsymbol{R(L) = t_{кр} - t(L)}$

Пример решения задачи. Для заданного сетевого графика рассчитать все параметры событий и работ, определить критический путь и его длину



Параметры событий сетевого графика

Номер события	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ранний срок	0	8	17	13	23	20	29	33	37	42	48	61
Поздний срок	0	9	40	13	26	20	29	43	38	42	48	61
Резерв времени	0	1	23	0	3	0	0	10	1	0	0	0

Критический путь образуют следующие события
0 → 3 → 5 → 6 → 9 → 10 → 11.

Его продолжительность составляет 61 день

№	Работа	Продолжительность работ (i,j)	Сроки начала и окончания работ				Резерв времени R_n(i,j)
			$t_{рн}$ (i,j)	$t_{ро}$ (i,j)	$t_{пн}$ (i,j)	$t_{по}$ (i,j)	
1	(0, 1)	8	0	8	1	9	1
2	(0, 3)	13	0	13	0	13	0
3	(0, 5)	9	0	9	11	20	11
4	(1, 2)	9	8	17	31	40	23
5	(1, 4)	6	8	14	20	26	12
6	(1, 3)	4	8	12	9	13	1
7	(2, 7)	3	17	20	40	43	23
8	(3, 4)	10	13	23	16	26	3
9	(3,5)	7	13	20	13	20	0

10	(3,6)	6	13	19	23	29	10
11	(4,7)	8	23	31	35	43	12
12	(4,6)	3	23	26	26	29	3
13	(5,6)	9	20	29	20	29	0
14	(5,8)	10	20	30	28	38	8
15	(5,9)	6	20	26	36	42	16
16	(6,7)	4	29	33	39	43	10
17	(6,10)	5	29	34	43	48	14
18	(6, 9)	13	29	42	29	42	0
19	(6, 8)	8	29	37	30	38	1
20	(7, 10)	5	33	38	43	48	10
21	(8, 9)	4	37	41	38	42	1
22	(9, 10)	6	42	48	42	48	0
23	(9, 11)	17	42	59	44	61	2
24	(10,11)	13	48	61	48	61	0

Коэффициентом напряженности *К н* работы (i,j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых являетсяпуть максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

$$Кн\ (i,i) = \frac{t(Lmax) — t'кр}{tкр — t'кр}$$

Где t(Lmax) — продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j)
Ткр — продолжительность (длина) критического пути
Т'кр — продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем

$$Кн\ (I,j) = 1- \frac{Rn(i,j)}{tкр — t'кр}$$

Rn (i,j) - полный резерв времени работ (i,j)

Коэффициент напряженности поазывает степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути

Тема 4: Задачи принятия решений в условиях неопределенности
4.1. Теория игр

1. Понятие и классификация игр
2. Геометрическая интерпретация игры 2х2

1. Понятие и классификация игр

Авторы теории игр: Дж.Фон Нейман и О. Монгерштерн (1944г)

Теория игр – это методы математической теории для решения задач конфликтных ситуаций

Элементы конфликта:

1) Игроки – множество заинтересованных сторон
2) Стратегии (ходы) – возможные действия каждого игрока
3) Функции выигрыша (платежа) – интересы каждого игрока

Модель конфликтной ситуации называется **игрой**

Признаки классификации игр:

- число игроков;
- число стратегий;
- свойства функции выигрыша;
- возможность предварительных переговоров
- возможность взаимодействия в ходе игры

1) Игра называется **парной**, если в ней участвуют 2 игрока, **множественной**, если число игроков более двух;
2) Игра называется **с нулевой суммой** или **антагонистической**,если выигрыш одного из игроко равен проигрышу другого
3) Игра называется **с постоянной разностью** — если игроки выигрывают и проигрывают одновременно;
4) Игра называется **конечной**,если у каждого игрока имеется конечное количество стратегий, и **бесконечной** — в противном случае
5) **Бескоалиционными** называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции.В **коалиционной игре** игроки могут вступать в соглашения и образовывать коалиции;
6) В **кооперативной игре** коалиции определены заранее (до начала игры). В **некооперативной** игре - решения принимаются независимо друг от друга в ходе игры;
7) **Комбинаторные игры** — число исходов, стратегий, факторов - конечное, не очень большое
8) В **случайных играх** количество исходов не зависит от поведения игрока. В **стратегических —** один участник находится в состоянии необределенности относительно поведения других участников игры;
9) **Матричная** игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы.

Ход игрока выбор и осуществление одного из премусмотренного правилами действий
Личный ход — сознательный выбор игроком одного из возможных действий
Случайный ход — это случайно выбранное действие
Стратегия игры — совокупность правил, определяющих выбор действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации
Решение игры — поиск стратегии для каждого ирока,которая удовлетворяет условию оптимальности, т. е. Один из игроков получает максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии
Оптимальные стратегии должны удовлетворять **условию устойчивости**, т. е. Любому из игроков должно быть невыгодно отказываться от своей стратегии в этой игре
Платежная матрица — это матрица, элементами которой являются выигрыши,соответствующие стратегиям игроков
Нижняя цена игры () (максиминный выигрыш — максимин) — это гарантированный выигрыш первого игрока при любой стратегии второго игрока (из каждой строки выбираем минимальное часло, а затем из всех минимумов берем наибольший. Стратегия называется максиминной.
Верхняя цена игры — (минимаксный выигрыш — минимакс) — это гарантированый проигрыш второго игрока (Из каждого столбца выбираем максимальное число, а затем из всех максимумов берем наименьший). Стратегия называется минимаксной.
Если верхняя и нижняя цены игры совпадают,то эта цена называется чистой ценой игры
Минимаксные стратегии,соответствующие цене игры, являются оптимальными стратегиями или решением игры.

Другие термины и понятия

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется

ходом игрока. Ходы могут быть личными и случайными.
Личный ход – это сознательный выбор игроком одного из возможных действий.
Случайный ход – это случайно выбранное действие (выбор карты из перетасованной колоды).
Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор действия при каждом ходе в зависимости от сложившейся ситуации.
Чтобы **решить игру** или найти решение игры, следует для каждого игрока **выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности**.
Условие оптимальности: один из игроков получает максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии.
Такие стратегии называются оптимальными
Оптимальные стратегии должны удовлетворять условию устойчивости.
Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока
Выигрыш – это мера эффекта для игрока
В теории игр выигрыш должен измеряться обязательно количественно.

Пример решения задачи. Игра в «орлянку».
Если оба выбирают одинаковые стратегии (оба говорят "орел"), то 1-й выигрывает 1 рубль (а второй проигрывает);
если выбирают разные, то 2-й выигрывает.

Матрица выигрыша первого игрока (H1)

	Орел	Решка
Орел	1	-1
Решка	-1	1

Матрица выигрыша второго игрока (H2)

	Орел	Решка
Орел	- 1	1
Решка	1	-1

Для антагонистических игр всегда H1= – H2.
Матрица, элементами которой являются выигрыши, соответствующие стратегиям игроков, называется **платежной матрицей или матрицей игры.**

Нижняя цена игры (α) (максиминный выигрыш – максимин) – это гарантированный выигрыш первого игрока при любой стратегии второго игрока. **Стратегия,** соответствующая максимину называется **максиминной.**

Верхняя цена игры (β) (минимаксный выигрыш – минимакс) – это гарантированный проигрыш второго игрока. **Стратегия,** соответствующая минимаксу, называется **минимаксной.**
Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее ≪осторожных≫ минимаксной и

максиминной стратегий, называется **принципом минимакса.**

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают α=β= ¶ , то эта цена называется **чистой ценой игры или ценой игры.**

Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются **оптимальными стратегиями или решением игры.**
Пара стратегий дает оптимальное решение игры тогда и только тогда, когда соответствующий элемент матрицы (размер выигрыша- проигрыша) является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.
Такая ситуация, если она существует, называется **седловой точкой.**
Пример решения задачи.
Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Имеет ли игра седловую точку?

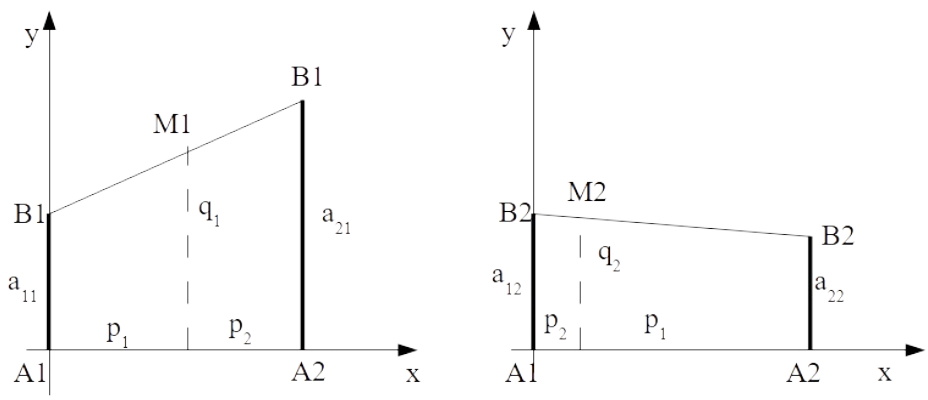
$$P = \begin{matrix} \mathbf{0{,}5} & \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}8} \\ \mathbf{0{,}9} & \mathbf{0{,}7} & \mathbf{0{,}8} \\ \mathbf{0{,}7} & \mathbf{0{,}6} & \mathbf{0{,}6} \end{matrix}$$

Платежная матрица игры:

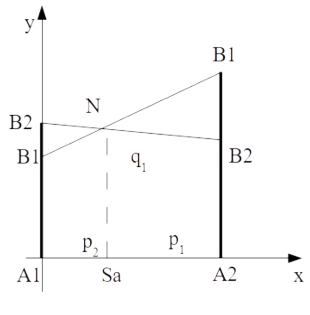
	B1	B2	B3	**α**
A1	0,5	0,6	0,8	0,5
A2	0,9	**0,7**	0,8	0,7
A3	0,7	0,6	0,6	0,6
β	0,9	0,7	0,8	0,7

α = β = d = 0,7 — цена игры. Седловая точка (A2,B2)

2. Геометрическая интерпретация игры 2x2
Пусть имеется два игрока A и B. У каждого из игроков по две стратегии (A1 и A2 у игрока A, B1 и B2 у игрока B). Игра с нулевой суммой



Геометрическая интерпретация стратегий первого игрока



Решение игры графическим способом
Отрезок B1N – минимальный выигрыш игрока А при использовании любой смешанной стратегии, если игрок В выбрал стратегию В1.
Аналогично, отрезок B2N – выигрыш игрока А, если игрок В выбрал стратегию В2.
Следовательно, оптимальную стратегию определяет точка N, то есть минимальный выигрыш достигает максимума.

Важно помнить.

Графически можно решить игру, если в игре участвуют только два игрока и у одного из игроков имеется только две стратегии (у второго игрока – любое количество стратегий).

2. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пример решения задачи. Предприятие может выпускать 3 вида продукции A1, A2 и A3, получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из 4-х состояний (B1, B2, B3, B4). Элементы платежной матрицы характеризуют прибыль, которую получат при выпуске i-й продукции при j-м состоянии спроса.
Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие максимизацию средней величины прибыли при любом состоянии спроса, считая его определенным.

	B1	B2	B3	B4	**α**
A1	3	3	6	8	3
A2	9	10	4	2	2
A3	7	7	5	4	4
β	9		6	8	6 4

т. к. α ≠ β, то седловая точка отсутствует. Решение будем искать в смешанных стратегиях.
Чтобы привести игру к задаче линейного программирования, обозначим:

$$X_i = \frac{P_i}{d} \qquad Y_i = \frac{q_i}{d}$$

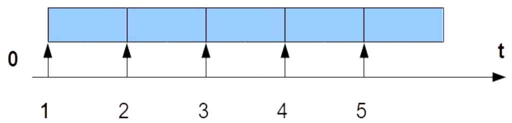
Тема 4: Задачи принятия решений в условиях неопределенности

4.2. Стохастическе модели в экономике: системы массового обслуживания

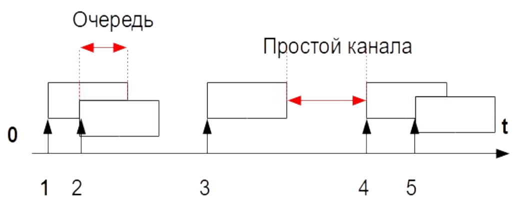
1. Структура и классификация системы массового обслуживания
2. Системы массового обслуживания с отказами
3. Системы массового обслуживания с неограниченны ожиданием
4. Системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Структура и классификация систем массового обслуживания (СМО)

Основные элементы систем массового облуживания:
1. Входящий поток требований;
2. Накопитель(очередь);
3. Приборы (каналы обслуживания);
4. Выходящий поток



а)



б)

Модель работы системы массового обслуживания
Стрелки – моменты поступлений требований в систему
Прямоугольники – время обслуживания
В зависимости от правил образования очереди различают следующие СМО:

1) ***системы с отказами*** (при занятости всех каналов обслуживания заявка покидает систему необслуженной);

2) ***системы с неограниченной очередью*** (заявка встает в очередь, если в момент ее поступления все каналы обслуживания были заняты);

3) ***системы с ожиданием и ограниченной очередью*** (время ожидания ограниченно какими-либо условиями или существуют ограничения на число заявок, стоящих в очереди)
Характеристики входящего потока требований:

1) **стационарный** – вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени определенной длины зависит только от длины этого участка;

2) **поток без последствий** – число событий, попадающих на некоторый участок времени,

не зависит от числа событий, попадающих на другие;

3) **<u>ординарный</u>** – поток, где невозможно одновременное поступление двух или более событий

Поток требований называется **<u>пуассоновским</u>** (простейшим), если он обладает тремя свойствами:

- стационарен;
- ординарен
- не имеет последствий

Интенсивностью потока заявок λ называется среднее число заявок, поступающих из потока за единицу времени.

Для стационарного потока интенсивность постоянна.

$$\Lambda = \frac{1}{\tau}$$

Где τ - среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками

$$t_{обсл} = \frac{1}{\mu}$$

$t_{обсл}$ — среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени

μ - интенсивность потока обслуживания

Загрузка системы — это среднее число заявок, проходящих за среднее время обслуживания одной заявки

Загрузка системы это отношение интенсивности входящего потока к интенсивности потока обслуживания

$$r = \frac{\lambda}{\mu}$$

2. Системы массового обслуживания с отказами

Имеется *n* каналов в обслуживании, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ.

Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания *tобсл*).

Требуется найти вероятности состояний СМО и характеристики ее эффективности.

Через Pk (t) обозначим вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии Sk

· <u>Вероятность того, что обслуживанием заняты *k* аппаратов (линий, приборов)</u>

$$P_k = \frac{\frac{r^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!}}, \ (0 \le k \le n)$$

$$r = \frac{\lambda}{\mu},$$

k – количество занятых аппаратов,
λ – интенсивность потока заявок,
μ – интенсивность потока обслуживания.
Вероятность простоя (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!}}$$

Вероятность отказа (вероятность того, что все обслуживающие приборы заняты):

$$P_{отк} = P_n = \frac{\frac{r^k}{n!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!}} = r^n \frac{P_0}{n!}$$

Относительная пропускная способность — средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой

$$P_{обсл} = 1 — P_{отк} = 1 - r^n \frac{P_0}{n!}$$

Абсолютная пропускная способность — среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}$$

Среднее число занятых каналов

$$K = \frac{A}{\mu} = r \cdot P_{обсл}$$

Доля каналов, занятых ослуживанием (коэффициент нагрузки)

$$q = \frac{k}{n}$$

Пример решения задачи.
На вход трехканальной СМО с отказами поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 4$ заявки в минуту. Время обслуживания заявки одним каналом $t_{обсл}$ = - 0,5 минут. Найти показатели работы системы.

Решение.
Находим вероятность простоя трехканальной СМО:

$$R = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{2} = 2 —$$

загрузка системы (среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки)
n =3

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = 0,158$$

Вероятность отказа определяем по формуле:

$$P_{отк} = \frac{r^n}{n!} P_0 = \frac{2^3}{3!} 0{,}158 = 0{,}21$$

Относительная пропускная способность системы:

$$P_{обсл} = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{r^n}{n!} P_0 = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

Абсолютная пропускная способность системы (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$$A = \lambda \cdot P_{обсл} = 4 \cdot 0{,}79 = 3{,}16$$

Среднее число занятых каналов:

$$K = \frac{A}{\mu} = r \cdot P_{обсл} = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$$

Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$q = \frac{k}{n} = \frac{1{,}58}{3} = 0{,}53$$

Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$t_{СМО} = 0{,}79 \cdot 0{,}5 = 0{,}395 мин$$

3. Системы массового обслуживания с неограниченны ожиданием

Пусть имеется n-канальная СМО с очередью, на которую не наложено ограничений ни по длине очереди, ни по времени ожидания. В силу неограниченности очереди каждая заявка рано или поздно будет обслужена, поэтому

$P_{обсл} = 1$, $P_{отк} = 0$.

Для СМО с неограниченной очередью накладывается ограничение

$$\frac{k}{n} \le 1$$

Если это условие нарушено, то очередь растет до бесконечности, наступает явление ≪взрыва≫.

· ***Вероятность простоя*** (того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!\,(n-r)}}$$

Вероятность занятости обслуживанием k каналов:

$$P^k = r^k \frac{P_0}{n!}, \ 1 \leq k \leq n$$

Вероятность занятости обслуживанием всех каналов при отсутствии очереди:

$$P_n = r^n \frac{P_0}{n!}$$

Вероятность наличия очереди есть вероятность того, что число требований в системе больше числа каналов:

$$P_{оч} = r^{k+1} \frac{Po}{n!\,(n-r)}$$

Вероятность для заявки попасть в очередь есть вероятность занятости всех каналов, эта вероятность равна сумме вероятностей наличия очереди и занятости всех *n* каналов при отсутствии очереди:

$$P_{зан} = P_n + P_{оч} = r^n \cdot \frac{P_o}{(n-1)!\,(n-r)}$$

Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$K = \frac{\Lambda}{\mu} = r$$

Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$q = \frac{k}{n}$$

Среднее число заявок в очереди (длина очереди)

.

$$L = r^{n+1} \cdot \frac{P_o}{(n-1)!\,(n-r)^2}$$

· ***Среднее число заявок в системе***

$M = L + k = L + r$

· ***Среднее время ожидания заявки в очереди***

$$t = \frac{L}{\lambda} \ .$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$\mathbf{T = t + \frac{1}{\mu}} \qquad \mathbf{T = \frac{M}{\lambda}}$$

Пример решения задачи.

На вход трехканальной СМО с неограниченной очередью поступает поток заявок с интенсивностью λ = 4 заявки в минуту. Среднее время обслуживания заявки *tобсл* = $\frac{1}{\mu}$ = 0,5 ч. Найти показатели эффективности работы системы.

Решение

Для рассматриваемой системы

$$n = 3,\ l = 4,\ m = \frac{1}{0{,}5} = 2,\quad r = \frac{r}{\mu} = 2, \frac{r}{n} = \frac{2}{3} < 1$$

Определяем вероятность простоя по формуле:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!\,(n-r)}} = \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\right)^{-1} = \frac{1}{9}$$

Среднее число заявок в очереди находим по формуле:

$$L = r^{n+1} \cdot \frac{P_o}{(n-1)!\,(n-r)^2} = 2^4 \cdot \frac{1/9}{2!\,(3-2)^2} = \frac{8}{9}$$

Среднее время ожидания заявки в очереди считаем по формуле

$$T = \frac{L}{\Lambda} = \frac{8/9}{4} = \frac{2}{9} = 0{,}22 \text{ ч}$$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$T = t + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18} = 0{,}72 \text{ ч}$$

4. Системы массового обслуживания с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Имеется *n*-канальная СМО с ожиданием, в которой количество заявок, стоящих в очереди, ограничено числом *m*, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее *m* заявок. Если число заявок в очереди равно *m*, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему необслуженной.

Системы с ограниченной очередью являются обобщением двух рассмотренных ранее СМО: при $m = 0$ получаем СМО с отказами, при $m =$ ¥ получаем СМО с ожиданием.

· ***Вероятность простоя*** **(**того, что все обслуживающие аппараты свободны, нет заявок):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!\,(n - r)} \left(1 - \left(\frac{r}{n}\right)^m\right)}$$

Вероятность отказа в обслуживании равна вероятности того, что в очереди уже стоят m заявок

$$P_{отк} = P_{n+m} = r^{n+m} \frac{P_o}{n!\,n^m}$$

Относительная пропускная способность есть величина дополняющая вероятность отказа до 1, т.е вероятность обслуживания

$\boldsymbol{P_{обсл} = 1 - P_{отк}}$

Абсолютная пропускная способность:

$A = \lambda\,(1 - P_{отк}) = \lambda \cdot P_{обсл}$

Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$K = \frac{A}{\mu} = r \cdot P_{обсл}$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$t = \frac{r_n P_o \left(\frac{r}{n} - (m+1) \left(\frac{r}{n}\right)^{m+1} + m \left(\frac{r}{n}\right)^{m+2} \right)}{n!\,\left(n - \frac{r}{n}\right)^2}$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди

$$t = \frac{L}{\lambda}$$

Среднее число заявок в системе:
M = L + k

Среднее время пребывания заявки в системе

$$T = t + \frac{1}{\mu}, \quad T = \frac{M}{\lambda}$$

Пример решения задачи.

В парикмахерской работают 3 мастера, в зале ожидания расположено 3 стула. Поток клиентов имеет интенсивность λ = 12 клиентов в час. Среднее время обслуживания заявки 20 = 1 = *обсл* m *t* мин. Определить относительную и абсолютную пропускную способность системы, среднее число занятых кресел, среднюю длину очереди, среднее время, которое клиент проводит в парикмахерской.

Решение

Для данной задачи

$n = 3,\ m = 3,\ l = 12,\ m = 3,\ r = \frac{r}{\mu} = 4,\ \frac{r}{n} = \frac{4}{3}$

Определяем вероятность простоя по формуле

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} + \frac{r^{n+1}}{n!\,(n - r)} \left(1 - \left(\frac{r}{n}\right)^m\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{3!(3-4)} \left(1 - \left(\frac{4^3}{3^3}\right)\right)\right.} = 0{,}012$$

Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = P_{n+m} = r^{n+m} \frac{P_o}{n!n^m} = 4^{3+3} \frac{0{,}012}{3!3^3} = 0{,}307$$

Относительная пропускная способность, т. е. Вероятность обслуживания:

$P_{обсл} = 1 — P_{отк} = 1 — 0{,}307 = 0{,}693$

Абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$A = \lambda \cdot Pобсл = 12 \cdot 0{,}693 = 8{,}32$

Среднее число занятых обслуживанием каналов (парикмахеров):

$$K = \frac{A}{\mu} = \frac{8{,}32}{3} = 2{,}78$$

Среднее число заявок в очереди (средняя длина очереди)

$$t = \frac{r_n P_o \left(\frac{r}{n} - (m+1)\left(\frac{r}{n}\right)^{m+1} + m\left(\frac{r}{n}\right)^{m+2}\right)}{n!\left(n - \frac{r}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{4^3 \cdot 0{,}012 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 4 \cdot \left(\frac{4^4}{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{4^5}{3}\right))}{3!\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2} = 1{,}56$$

Среднее время ожидания обслуживания в очереди

$$t = \frac{L}{\lambda} = \frac{1{,}56}{12} = 0{,}13 \text{ ч}$$

Среднее число заявок в системе

$M = L + k = 1{,}56 + 2{,}78 = 4{,}34$

Среднее время пребывания заявки в системе

$$T = \frac{M}{\lambda} = \frac{4{,}34}{12} = 0{,}36 \text{ ч}$$